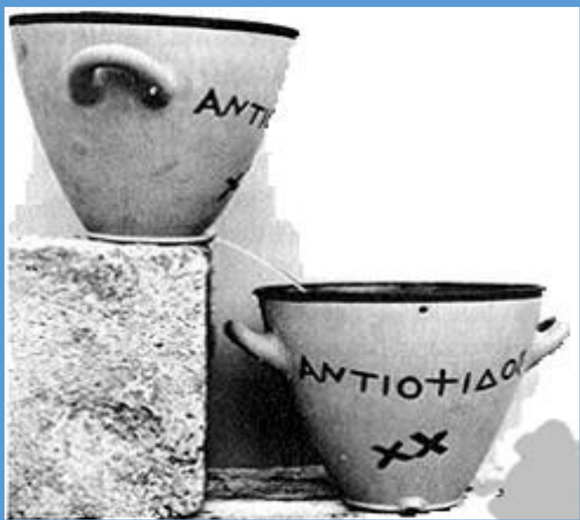
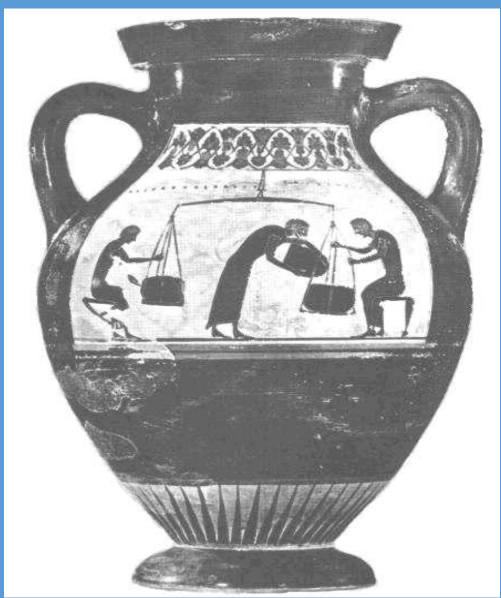
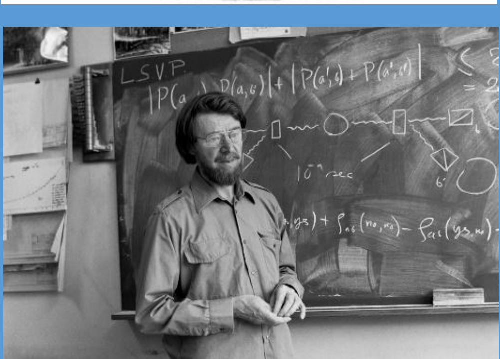
Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

Εμμανουήλ Αντ. Δρης







$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle\right), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle - |1,1\rangle\right),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle - |1,0\rangle\right).$$

ΚΑΛΛΙΠΟΣ ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Εθνικό Πρόγραμμα Ανάπτυξης 2021-2025

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΑΝΤ. ΔΡΗΣ
Ομότιμος Καθηγητής
Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

Δεύτερη έκδοση

ΚΑΛΛΙΠΟΣ
ανοικτές ακαδημαϊκές εκδόσεις

Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων
Σημαντικά Ψηφία
Διαστατική Ανάλυση

Συγγραφή

Εμμανουήλ Αντ. Δρης

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Δημήτριος Καλλιάρας

Γραφιστική Επιμέλεια: Ιωάννης Θεοδώνης

Κεντρική Ομάδα Υποστήριξης

Γλωσσικός Έλεγχος: Γεωργία Τριανταφυλλίδου

Γραφιστικός Έλεγχος: Αλεξάνδρα Θεοδωράκη

Βιβλιοθηκονομική Επεξεργασία: Έλενα Αδαμοπούλου

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN: 978-618-228-119-2

Βιβλιογραφική Αναφορά: Δρης, Ε. (2024). *Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων — Σημαντικά Ψηφία — Διαστατική Ανάλυση* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-354

Εικόνα εξώφυλλου: Φαίνεται με εικόνες η εξέλιξη των μονάδων μέτρησης από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Δείχνεται ένα σύστημα με κλεψύδρες για μέτρηση του χρόνου. Ένα ίχνος πατημασιάς που δηλώνει μέτρηση μήκους, ένα πόδι. Εικόνα σε αγγείο όπου μετριέται η μάζα. Ένας λογαριθμικός κανόνας για υπολογισμούς που εχρησιμοποιείτο ευρέως κατά τον 20ό αιώνα. Απεικόνιση δυαδικών αριθμών ηλεκτρονικού υπολογιστή. Φωτογραφία του αείμνηστου John Bell στο γραφείο του στο CERN, πρωτοπόρου στα περί κβαντικής διεμπλοκής (quantum entanglement) και η σχέση για καταστάσεις του Bell, δηλαδή κβαντικές καταστάσεις δύο qubits. Αυτά τα τελευταία σχετίζονται με τους αναπτυσσόμενους κβαντικούς υπολογιστές και την κβαντική κρυπτογραφία.

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνυμίων

ATLAS	A Toroidal LHC Apparatus
BEH	Brout-Englert-Higgs
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
CGPM	General Conference on Weights
CGS	Centimeter Gram Second
CERN	Conseil Européen pour Recherche Nucléaire (European Organization for Nuclear Research)
CMS	Compact Muon Solenoid
CODATA	Committee on Data for Science and Technology
GIM	Glashow-Iliopoulos-Maiani
ISO	International Organization for Standardization
LHC	Large Hadron Collider
NIST	National Institute of Standards and Technology
SI	Système International d'Unités (International System of Units)
ΕΛΟΤ	Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης
ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΔΣ	Διεθνές Σύστημα Μονάδων

Πρόλογος

Στόχος του παρόντος συγγράμματος είναι να δώσει κάποιες πληροφορίες σχετικές με τη διεθνή πρακτική που αφορά τα μεγέθη (ποσότητες), τις μονάδες μέτρησης, τον συμβολισμό των μονάδων και μεγεθών, την ονοματολογία τους, καθώς και πληροφορίες για τα σημαντικά ψηφία και τη Διαστατική Ανάλυση (Dimensional Analysis). Για περισσότερες πληροφορίες μπορεί κάποιος να ανατρέξει στη βιβλιογραφία που παραθέτουμε.

Το περιεχόμενο αυτού του πονήματος είναι χρήσιμο στους διδάσκοντες, ώστε μέσω αυτού να «περάσει» η σχετική γνώση και στους μαθητές και στους φοιτητές. Ακόμη είναι χρήσιμο στους εκδοτικούς οίκους όσον αφορά το τυπικό μέρος γραφής, δηλαδή τον συμβολισμό και την ονοματολογία. Απευθύνεται κυρίως σε Φυσικούς αλλά και σε ανθρώπους που ασχολούνται με τις εφαρμογές της Φυσικής. Στη βιβλιογραφία που δίνουμε μπορεί να βρει κάποιος περισσότερες λεπτομέρειες που αφορούν όλους τους επιστημονικούς κλάδους, όπως Βιολογία, Ιατρική, Γενική Σχετικότητα, Αστρονομία. Ειδικοί στα θέματα αυτά στην Ελλάδα είναι κυρίως επιστήμονες που εργάζονται στον ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης). Για το θέμα της διαστατικής ανάλυσης, πιο ειδικοί είναι επιστήμονες που ασχολούνται κυρίως με τα ρευστά.

Ευχαριστώ τον Καθηγητή του ΕΚΠΑ Πάρι Σφήκα του οποίου οι εύστοχες παρατηρήσεις οδήγησαν στο να είναι πολύ πιο εμπλουτισμένη αυτή η 2η έκδοση του βιβλίου.

Εμμανουήλ Αντ. Δρης
Αθήνα, Ιανουάριος 2023

Εισαγωγή

Η μετρολογία είναι η επιστήμη της μέτρησης. Η ύπαρξή της χάνεται στα βάθη των αιώνων. Υπάρχει από την εποχή που οι άνθρωποι άρχισαν να κάνουν διάφορες ανταλλαγές. Αναπτύσσεται όλο και περισσότερο καθώς κατασκευάζονται πιο εξελιγμένα εργαλεία και προϊόντα. Στα παλιά χρόνια υπήρχε σχεδόν «χάος», δηλαδή υπήρχε μεγάλο πλήθος «μέτρων» των διάφορων προϊόντων που παράγονταν και ανταλλάσσονταν.

Η σύγχρονη μετρολογία άρχισε περίπου στα μέσα του 19^{ου} αιώνα ως συνέπεια της πολύ μεγάλης ανάπτυξης της βιομηχανίας και του διεθνούς εμπορίου. Μπορούμε να πούμε ότι η πρώτη σημαντική προσπάθεια ξεκινά με τη Γαλλική Επανάσταση όταν προτάθηκε το μετρικό σύστημα που είναι ο πρόγονος του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων ΔΣ, (SI, Système International d'Unités, International System of Units). Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα υπήρξε πιο έντονη η ανάγκη να καθιερωθούν διεθνείς συμφωνίες όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης και έτσι ιδρύθηκε η Συνθήκη του Μέτρου (Meter Convention) το 1875. Αυτή δίνει το πλαίσιο για διακυβερνητικές συμφωνίες σε θέματα που σχετίζονται με τη μετρολογία και τις μονάδες μέτρησης. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν τρεις διεθνείς Οργανισμοί, το Γραφείο Διεθνών Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM), η Γενική Συνδιάσκεψη για Μέτρα και Σταθμά (General Conference on Weights and Measures, CGPM) και η Διεθνής Επιτροπή για Μέτρα και Σταθμά (International Committee for Weights and Measures, CIPM). Αμέσως μετά, οι κυριότερες βιομηχανικές και εμπορικές χώρες έφτιαξαν τα δικά τους εθνικά εργαστήρια για πρότυπα. Επίσης, πολλές χώρες έχουν Εθνικά Ινστιτούτα Μετρολογίας (National Metrology Institutes, NMI). Αυτά τα Ινστιτούτα μαζί με το BIPM ασχολούνται με το παγκόσμιο σύστημα μετρήσεων, του οποίου θεμέλιο είναι το SI. Το SI είναι ένα ζωντανό εξελισσόμενο σύστημα που αλλάζει διαρκώς, καθώς προκύπτουν νέα γνώση και νέες ανάγκες μέτρησης. Τέλος, αναφέρουμε τον Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (International Organization for Standardization, ISO), ο οποίος είναι μια παγκόσμια συνεργασία αποτελούμενη από Οργανισμούς Εθνικών Προτύπων (Οργανισμοί-μέλη του ISO). Τις επιμέρους εργασίες προτυποποίησης τις αναλαμβάνουν τεχνικές επιτροπές του ISO.

Η τεχνική επιτροπή ISO/TC 12 έχει σκοπό την τυποποίηση των μονάδων, των συμβόλων για τις διάφορες ποσότητες και μονάδες και τα μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις διάφορες περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Δίνει, όπου χρειάζεται, ορισμούς αυτών των ποσοτήτων και των μονάδων. Μια άλλη ευθύνη αυτής της επιτροπής είναι να δίνει τυποποιημένους συντελεστές μετατροπής μεταξύ των διάφορων μονάδων. Ο ISO συνεργάζεται στενά με τη Διεθνή Επιτροπή Ηλεκτροτεχνίας (International Electrotechnical Commission, IEC). Στην Ελλάδα υπεύθυνη υπηρεσία για θέματα τυποποίησης είναι ο ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης).

Η CODATA (Committee on Data for Science and Tecnology) είναι η επιτροπή που διαχειρίζεται τα αποτελέσματα διάφορων μετρήσεων και δημοσιεύει τις τιμές των μετρήσεων με τις αβεβαιότητές τους στο τέλος του χρόνου, κάθε τέσσερα χρόνια. Μια εύχρηστη ιστοσελίδα με τις τελευταίες, κάθε φορά, τιμές των φυσικών σταθερών είναι αυτή του Εθνικού Ινστιτούτου Προτύπων και Τεχνολογίας (National Institute of Standards and Technology, NIST) των ΗΠΑ: https://pml.nist.gov/cuu/Constants/. Σε αυτό το πόνημα, οι τιμές σταθερών που προκύπτουν από μετρήσεις είναι αυτές της τετραετίας 2018-2022.

Γενικά

Στη βιβλιογραφία που παραθέτουμε, υπάρχουν οι ακριβείς ορισμοί των διάφορων εννοιών που σχετίζονται με τα μεγέθη (ποσότητες) και τη μέτρησή τους, την αβεβαιότητα στη μέτρησή τους κτλ. Οι ορισμοί είναι ένα είδος λεξιλογίου, αποτελούν μια ενιαία αναφορά χρήσιμη σε επιστήμονες και μηχανικούς, στους οποίους συμπεριλαμβάνονται φυσικοί, χημικοί, επιστήμονες της ιατρικής, επίσης διδάσκοντες, και σε ανθρώπους που κάνουν μετρήσεις, κυρίως, ακριβείας. Οι ορισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι και για διακυβερνητικές επιτροπές, εμπορικές οργανώσεις, επιτροπές πιστοποίησης, κανονιστικά όργανα και επαγγελματικές εταιρείες.

Δίνουμε τους διάφορους όρους στην ελληνική γλώσσα, αλλά μερικές φορές τους δίνουμε και στη γαλλική και στην αγγλική. Η δημιουργία μιας διεθνούς σχετικής «γλώσσας» είναι ένα βασικό στοιχείο αυτής της προσπάθειας. Υπάρχουν πολλά εργαστήρια μετρολογίας σε όλο τον κόσμο, στα οποία απασχολούνται πολλοί επιστήμονες.

Τα διάφορα σχετικά διεθνή κείμενα είναι γραμμένα στα γαλλικά και στα αγγλικά. Αν υπάρχουν αμφιβολίες, κυριαρχεί το γαλλικό κείμενο. Εδώ δεν πρόκειται να αναφερθούμε με όλη τη λεπτομέρεια σε αυτό το αντικείμενο, απλώς θα κάνουμε μια εισαγωγή.

Κατά καιρούς έχουν υπάρξει διάφορα συστήματα φυσικών μεγεθών (ποσοτήτων) και μονάδων μέτρησής τους. Τελικά, έχει κυριαρχήσει παγκοσμίως το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI (Le Système International d'Unités), που κατά κύριο λόγο θα μας απασχολήσει στα επόμενα.

Σημειώνουμε εδώ, ότι από τις 20 Μαΐου 2019 ισχύουν οι τροποποιημένοι ορισμοί των λεγόμενων θεμελιωδών μονάδων του SI που θα δούμε παρακάτω. Αυτή η ημερομηνία επιλέχτηκε, διότι είναι η ετήσια Παγκόσμια Ημέρα Μετρολογίας (World Metrology Day). Είναι η ημέρα κατά την οποία υπογράφτηκε η Σύμβαση του Μέτρου (The Metre Convention) το 1875.

Κεφάλαιο 1
Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων

1.1 Μεγέθη και μονάδες

1.1.1 Μέγεθος (grandeur; quantity)

Στα ελληνικά χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τους όρους *μέγεθος* και *ποσότητα*. Αυτή είναι ιδιότητα ενός φαινομένου, ενός σώματος ή μιας ουσίας. Αυτή η ιδιότητα, σε ειδικές περιπτώσεις, μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά με τη μορφή ενός αριθμού και μίας αναφοράς. Η αναφορά μπορεί να είναι μια μονάδα μέτρησης, μια διαδικασία μέτρησης, ένα υλικό αναφοράς ή κάποιος συνδυασμός τους. Η ποσοτική έκφραση ονομάζεται *τιμή* του φυσικού μεγέθους. Το σύμβολο είναι ίδιο για το φυσικό μέγεθος και την τιμή του.

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν τα λεγόμενα μεγέθη (ποσότητες) κατάταξης (grandeurs ordinales; ordinal quantities). Αυτά δεν θεωρούνται ότι είναι μέρος ενός συστήματος μεγεθών (που θα δούμε παρακάτω), διότι σχετίζονται με άλλα μεγέθη μόνο με εμπειρικές σχέσεις και ορίζονται με μια συμβατική διαδικασία μέτρησης. Υπάρχει μόνο κατάταξη τέτοιων μεγεθών ίδιου είδους, σύμφωνα με την αριθμητική τιμή του μεγέθους. Δεν έχουν φυσικό νόημα διαφορές και λόγοι τέτοιων μεγεθών. Ένα παράδειγμα είναι το μέγεθος που ονομάζεται *σκληρότητα* (τύπου) C (του) Rockwell (υπό φορτίο 150 kg), HRC (150 kg), Durete C de Rockwell (charge de 150 kg), HRC (150 kg), Rockwell C hardness (150 kg load), HRC (150 kg). Αυτό το μέγεθος μπορεί να σχετίζεται με τη σκληρότητα ενός δείγματος ατσαλιού. Το φορτίο καταπόνησης είναι δύναμη ίση με 150 kgf. Κατά τα γνωστά, κατά προσέγγιση, στην επιφάνεια της γης αυτό το φορτίο είναι ίσο με το βάρος μάζας 150 kg. Εκτός από αυτό το παράδειγμα, υπάρχουν διάφοροι τρόποι καθορισμού (μέτρησης) της σκληρότητας. Για λεπτομέρειες πρέπει να ανατρέξει κάποιος στη βιβλιογραφία τη σχετική με την αντοχή των υλικών. Στην κατηγορία μεγεθών κατάταξης ανήκουν ο αριθμός οκτανίων των καυσίμων, η ένταση σεισμού στην κλίμακα Richter κτλ. Τέτοια μεγέθη μπορεί να μπαίνουν μόνο σε εμπειρικές σχέσεις και δεν έχουν μονάδες μέτρησης ούτε, αυτό που λέμε *διαστάσεις*, όπως θα δούμε παρακάτω.

Μια άλλη έννοια είναι η *κλίμακα τιμών μεγέθους* (échelle de valeurs, échelle de mesure; quantity-value scale, measurement scale). Πρόκειται για σύνολο διατεταγμένων τιμών μεγεθών για δεδομένου είδους μέγεθος, που χρησιμοποιείται για κατάταξη, σύμφωνα με αριθμητική τιμή μεγεθών αυτού του συγκεκριμένου είδους. Παραδείγματα είναι η κλίμακα θερμοκρασίας Κελσίου, η κλίμακα του χρόνου, η κλίμακα σκληρότητας Rockwell C. Σημειώνουμε ότι δεν έχει νόημα (για παράδειγμα) το πηλίκο θερμοκρασιών Κελσίου ή/και θερμοκρασιών Φαρενάιτ. Έχουν νόημα τα πηλίκα διαφορών θερμοκρασίας. Επίσης, στην κάθε κλίμακα έχει νόημα η κατάταξη θερμοκρασιών, μεγαλύτερη ή μικρότερη θερμοκρασία από μια άλλη.

Εδώ θα ασχοληθούμε με φυσικά μεγέθη που εκφράζονται ποσοτικά ως γινόμενα αριθμού επί μονάδα μέτρησης. Σε αυτήν την περίπτωση η αναφορά είναι η μονάδα μέτρησης. Αυτό το γινόμενο είναι η τιμή του μεγέθους. Θα ασχοληθούμε δηλαδή με μεγέθη που δεν είναι μεγέθη κατάταξης. Σύμβολα για τις ποσότητες (μεγέθη) δίνονται στις σειρές ISO 80000 και IEC 80000 υπό τον τίτλο Quantities and Units. Η ποσότητα, όπως την ορίσαμε, είναι βαθμωτή (μονόμετρη) ποσότητα. Εντούτοις, ένα διάνυσμα ή ένας τανυστής, οι συνιστώσες των οποίων είναι βαθμωτές ποσότητες με την παραπάνω έννοια, θεωρούνται επίσης ότι είναι ποσότητες. Η γενική έννοια μέγεθος (ποσότητα) μπορεί να χωριστεί σε διάφορα επίπεδα ειδικών εννοιών. Ακόμη έχουμε διαχωρισμούς, όπως φυσικό μέγεθος, χημική ποσότητα και βιολογική ποσότητα, θεμελιώδες μέγεθος και παράγωγο μέγεθος.

Υπάρχει η έννοια που αναφέρεται ως είδος (κατηγορία) μεγέθους (nature de grandeur; kind of quantity). Πρόκειται για χαρακτηρισμό που είναι κοινός για συγκρίσιμες μεταξύ τους ποσότητες. Αυτός ο διαχωρισμός είναι λίγο πολύ αυθαίρετος. Συνηθίζεται η διάμετρος, η περιφέρεια και το μήκος κύματος να θεωρούνται ποσότητες (μεγέθη) ίδιου είδους, ίδιας κατηγορίας, συγκεκριμένα, του είδους που αναφέρεται ως *μήκος*. Οι ποσότητες θερμότητα, κινητική ενέργεια και δυναμική ενέργεια θεωρούνται ότι είναι του ίδιου είδους, συγκεκριμένα του είδους μεγέθους που λέγεται *ενέργεια*. Χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον όρο μέγεθος χωρίς τις επιμέρους διακρίσεις, διότι υποτίθεται ότι αποφεύγεται η σύγχυση από τα συμφραζόμενα στο κείμενο. Οι ποσότητες του ίδιου είδους έχουν ίδιες διαστάσεις (που θα δούμε παρακάτω), όμως δεν ισχύει το αντίστροφο. Τα μεγέθη ροπή δύναμης και ενέργεια, συμβατικά, δεν θεωρούνται ότι είναι του ίδιου είδους, παρόλο που έχουν ίδιες διαστάσεις. Υπάρχει και η έννοια της *επιμέρους* (ή συγκεκριμένης) *ποσότητας* (individual quantity). Τέτοια μεγέθη είναι: η ακτίνα r_{A} του κύκλου Α, η κινητική ενέργεια T_i του σωματίου i. Πολλές φορές παραλείπουμε τους δείκτες, αλλά από το κείμενο φαίνεται πως αναφερόμαστε σε συγκεκριμένο μέγεθος, δηλαδή μέγεθος για μια ειδική περίπτωση. Τα επιμέρους μεγέθη έχουν αντίστοιχα γενικά μεγέθη. Συγκεκριμένα, στο (γενικό) μέγεθος ενέργεια υπάγεται το (επίσης γενικό) μέγεθος κινητική ενέργεια και σε αυτό υπάγεται η επιμέρους κινητική ενέργεια που έχει συγκεκριμένο υλικό σημείο.

Η άλγεβρα που χρησιμοποιείται για να περιγραφούν φυσικές αιτίες και τα αποτελέσματα που προκαλούν δεν είναι ίδια με την άλγεβρα των καθαρών μαθηματικών (συνήθης άλγεβρα), παρόλο που απλοϊκά φαίνεται να είναι ίδια. Η συνήθης άλγεβρα είναι η έκφραση σχέσεων μεταξύ αριθμών, παρόλο που συνήθως για την παράσταση αριθμών χρησιμοποιούνται διάφορα σύμβολα. Δεν ενδιαφέρει τον καθαρό μαθηματικό με τι πράγματα σχετίζονται αυτοί οι αριθμοί. Η «φυσική» άλγεβρα που χρησιμοποιείται στις φυσικές επιστήμες, χρησιμοποιείται για να εκφραστούν σχέσεις μεταξύ των τιμών φυσικών ποσοτήτων όπως της δύναμης, του χρόνου, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης κτλ. Έτσι έχουμε σχέσεις που μας λένε πως εξαρτάται η τιμή μιας φυσικής ποσότητας από τις τιμές άλλων φυσικών ποσοτήτων. Οι μονάδες μέτρησης τυπικά μοιάζουν με αλγεβρικά σύμβολα που όπως είπαμε απαντούν στις τιμές των φυσικών μεγεθών ως παράγοντες σε γινόμενα. Στα γινόμενα μπορεί να υπάρχουν αριθμοί και σύμβολα αριθμών. Για τα γινόμενα και πηλίκα μεταξύ τιμών φυσικών ποσοτήτων ισχύουν αυτά που ισχύουν στη συνήθη άλγεβρα. Μια ουσιώδης διαφορά υπάρχει στην πρόσθεση και στην αφαίρεση: σε αυτήν την περίπτωση, όπως θα δούμε και παρακάτω, πρέπει τα μεγέθη να είναι του ίδιου είδους. Αυτό συνεπάγεται πως θα έχουν και ίδιες διαστάσεις. Ίδιες διαστάσεις πρέπει να έχουν προσθετέοι σε μια έκφραση και προφανώς τα δύο μέλη μιας εξίσωσης. Περισσότερα θα αναφέρουμε σε άλλο σημείο. Μπορούμε μαθηματικά να προσθέσουμε τον αριθμό 34 που αναφέρεται σε 34 δευτερόλεπτα χρόνου με τον αριθμό 63 που αναφέρεται σε 63 χιλιόμετρα μήκους, αλλά ο αριθμός που προκύπτει, 97, δεν έχει κανένα φυσικό νόημα.

1.1.2 Σύστημα μεγεθών (système de grandeurs; system of quantities)

Αυτό είναι ένα σύνολο μεγεθών μαζί με ένα σύνολο εξισώσεων που δεν είναι αντιφατικές μεταξύ τους, οι οποίες συνδέουν αυτά τα μεγέθη. Θα δούμε παρακάτω ότι οι σχέσεις είναι ομογενείς. Αυτό ονομάζεται *συνεπές σύστημα μεγεθών*. Σε ένα σύστημα μεγεθών ορίζεται η έννοια *θεμελιώδες μέγεθος* ή *μέγεθος αναφοράς* (grandeur de base; base quantity). Πρόκειται για μέγεθος (ποσότητα) που ανήκει σε ένα υποσύνολο του δεδομένου συστήματος μεγεθών, το οποίο έχει επιλεγεί συμβατικά. Σε αυτό το υποσύνολο κανένα μέγεθός του δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άλλων μεγεθών του υποσυνόλου. Το υποσύνολο αυτό ονομάζεται *σύνολο θεμελιωδών μεγεθών* (ή σύνολο μεγεθών αναφοράς). Με άλλα λόγια, αυτές οι θεμελιώδεις ποσότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αποτελούν πλήρες σύστημα με την έννοια πως κάθε μέγεθος του συστήματος μεγεθών μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα συναρτήσει αυτών των θεμελιωδών μεγεθών.

Το μέγεθος *πλήθος οντοτήτων* θεωρείται ως θεμελιώδης ποσότητα σε οποιοδήποτε σύστημα μεγεθών. Παράδειγμα είναι το πλήθος των σπειρών πηνίου. Στο σύστημα μεγεθών ορίζεται και η έννοια *παράγωγο μέγεθος* (grandeur dérivée; derived quantity). Αυτό είναι μέγεθος του συστήματος μεγεθών που ορίζεται ως προς τα θεμελιώδη μεγέθη του συστήματος. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα μεγεθών το οποίο έχει ως θεμελιώδη μεγέθη το μήκος και τη μάζα, η πυκνότητα μάζας είναι παράγωγο μέγεθος (ποσότητα), η οποία ορίζεται από την εξίσωση του συστήματος μεγεθών που θεωρείται ότι είναι πυκνότητα ίση με το πηλίκο της μάζας διά του όγκου. Ο όγκος με τη σειρά του, είναι παράγωγο μέγεθος που θεωρείται ότι ορίζεται ως μήκος στην τρίτη δύναμη (στον κύβο).

1.1.3 Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (Systéme International de grandeurs, ISQ; International System of Quantities, ISQ)

Σε αυτό το σύστημα υπάρχουν επτά θεμελιώδεις ποσότητες (μεγέθη) που είναι τα εξής: χρόνος, μήκος, μάζα, ηλεκτρικό ρεύμα, θερμοδυναμική θερμοκρασία, ποσό ουσίας και ένταση φωτοβολίας. Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (International System of Units, SI) βασίζεται στο ISQ. Θα δούμε παρακάτω λεπτομέρειες για το SI.

1.1.4 Διάσταση μεγέθους (dimension, dimension d'une grandeur; dimension of a quantity, dimension)

Θα αναφερθούμε παρακάτω στις διαστάσεις με περισσότερες λεπτομέρειες. Διάσταση μεγέθους είναι η έκφραση της εξάρτησης μιας ποσότητας από τις θεμελιώδεις ποσότητες ενός συστήματος μεγεθών. Πρόκειται για γινόμενο δυνάμεων παραγόντων που αποτελούνται από θεμελιώδεις ποσότητες, παραλείποντας αριθμητικούς συντελεστές που μπορεί να υπάρχουν στις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των μεγεθών.

Για παράδειγμα στο ISQ, η διάσταση του μεγέθους κινητική ενέργεια που για υλικό σημείο δίνεται από τη σχέση $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, παριστάνεται με $\dim E_k = \mathrm{T}^{-2}\mathrm{L}^2\mathrm{M}$. Θα δούμε παρακάτω περισσότερα.

Υπάρχει και η έννοια *μέγεθος διάστασης ένα*, που για ιστορικούς λόγους ονομάζεται και *αδιάστατο μέγεθος* (grandeur sans dimension, grandeur de dimension un; quantity of dimension one, dimensionless quantity). Πρόκειται για μέγεθος για το οποίο όλοι οι εκθέτες των παραγόντων που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις ποσότητες, στη σχέση για τη διάστασή του, είναι μηδέν. Μερικά μεγέθη με διάσταση ένα ορίζονται ως λόγοι δύο μεγεθών (πηλίκο μεγεθών ίδιου είδους). Παραδείγματα είναι η επίπεδη γωνία, η στερεά γωνία, ο συντελεστής τριβής, ο αριθμός Mach.

Υπάρχουν και μεγέθη που δεν μπορούν να εκφραστούν σε σχέση με τις επτά θεμελιώδεις ποσότητες του SI, για παράδειγμα, το πλήθος οντοτήτων, όπως το πλήθος μορίων, ο αριθμός (το πλήθος) των σπειρών ενός πηνίου κτλ. Λέμε ότι και αυτές οι ποσότητες έχουν διάσταση ένα και η μονάδα μέτρησής τους (βλέπε παρακάτω) είναι το ένα που έχει ως σύμβολο τον αριθμό 1, παρόλο που συνήθως το σύμβολο δεν γράφεται. Σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, θεωρούμε ότι αυτή η μονάδα μέτρησης είναι θεμελιώδης μονάδα για κάθε σύστημα μονάδων. Οι επίπεδες και οι στερεές γωνίες, όταν εκφράζονται σε radian και steradian αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται στο SI ως μεγέθη με μονάδα το ένα. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις προτιμάται να χρησιμοποιούνται τα ειδικά σύμβολα rad και sr, αντί του 1, ώστε να φαίνεται ότι αναφερόμαστε σε επίπεδες ή στερεές γωνίες αντίστοιχα. Τα radian και steradian θεωρούνται παράγωγες μονάδες.

1.1.5 Μονάδα μέτρησης (unité de mesure, unité; measurement unit; unit of measurement)

Αυτή είναι μια πραγματική (όχι μιγαδική) βαθμωτή (μονόμετρη) συγκεκριμένη ποσότητα (η οποία ορίστηκε και έγινε δεκτή συμβατικά) με την οποία μπορεί να συγκριθεί κάθε άλλη ποσότητα ίδιου είδους ώστε ο λόγος των δύο ποσοτήτων να εκφραστεί ως ένας αριθμός. Μερικές φορές χρησιμοποιείται ορολογία όπως *μονάδα μάζας* κτλ. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, θυμίζουμε πως κάποτε η μονάδα μήκους καθοριζόταν από το μήκος του τόξου μεταξύ του Ισημερινού και του Βόρειου Πόλου του μεσημβρινού της Γης που περνά από το Παρίσι. Συγκεκριμένα, ορίστηκε ως το 1/10 000 000 αυτού του μήκους και ονομάστηκε μέτρο (m). Εννοείται ότι το μήκος αυτού του τόξου θεωρήθηκε ως μια σταθερά, ένα πρότυπο μήκος, ένα σταθερό μήκος, με τιμή 10 000 000 m. Σήμερα, όπως θα δούμε, ισχύει κάτι άλλο, αλλά η βασική ιδέα είναι ίδια. Οι μονάδες πάντοτε στηρίζονται άμεσα ή έμμεσα σε κάποιες σταθερές, πρότυπα, που έχουν θετικές αριθμητικές τιμές. Οι σταθερές αυτές είναι οι *θεμελιώδεις σταθερές*.

Υπάρχει η έννοια *θεμελιώδης μονάδα* ή *μονάδα αναφοράς* (unité de base; base unit). Αυτή είναι μονάδα μέτρησης ενός θεμελιώδους μεγέθους, η οποία έχει γίνει αποδεκτή συμβατικά. Σε διάφορα συστήματα μεγεθών και μονάδων, το μήκος είναι θεμελιώδες μέγεθος. Είδαμε προηγουμένως ότι το μέτρο που είναι η θεμελιώδης μονάδα μήκους στο SI ορίστηκε με βάση τη θεμελιώδη σταθερά που είναι το τόξο 90 μοιρών του συγκεκριμένου μεσημβρινού που αναφέραμε. Ορίστηκε ως το 1/10 000 000 αυτής της θεμελιώδους σταθεράς. Σε συστήματα τύπου CGS, θεμελιώδης μονάδα μήκους είναι το cm που είναι το 1/100 000 000 του μήκους της παραπάνω θεμελιώδους σταθεράς. Σε κάθε σύμφωνο (coherent) σύστημα μονάδων (που θα δούμε παρακάτω) υπάρχει μόνο μια θεμελιώδης μονάδα για καθεμία θεμελιώδη ποσότητα. Ανεξάρτητα του πώς ορίζεται σήμερα, το μέτρο είναι η θεμελιώδης μονάδα για το μήκος στο SI, ενώ στα συστήματα τύπου CGS η θεμελιώδης μονάδα μήκους είναι το εκατοστόμετρο (εκατοστό).

Μια άλλη έννοια είναι η *παράγωγη μονάδα* (unité dérivée; derived unit). Αυτή είναι μονάδα μέτρησης για μια παράγωγη ποσότητα. Για παράδειγμα, το μέτρο ανά δευτερόλεπτο ($\mathrm{m/s}$) και το εκατοστό ανά δευτερόλεπτο ($\mathrm{cm/s}$) είναι παράγωγες μονάδες για την ταχύτητα στο SI. Το χιλιόμετρο την ώρα ($\mathrm{km/h}$) είναι μονάδα μέτρησης ταχύτητας εκτός (δεν ανήκει στο) SI, αλλά έχει γίνει αποδεκτό να χρησιμοποιείται με το SI. Το knot (ο κόμβος) που σημαίνει ένα ναυτικό μίλι ανά ώρα είναι μονάδα μέτρησης ταχύτητας εκτός SI.

Θα αναφερθούμε τώρα στη σύμφωνη παράγωγη μονάδα (unité dérivée cohérent; coherent derived unit). Αυτή είναι παράγωγη μονάδα για ένα σύστημα μεγεθών και για ένα επιλεγμένο σύνολο θεμελιωδών μονάδων. Μια σύμφωνη παράγωγη μονάδα είναι γινόμενο δυνάμεων θεμελιωδών μονάδων χωρίς άλλους αριθμητικούς πολλαπλασιαστές (συντελεστές) που δεν είναι ίσοι με τη μονάδα. Για παράδειγμα, ισχύει για την κινητική ενέργεια σωματιδίου η σχέση που είδαμε παραπάνω $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, η μονάδα της κινητικής ενέργειας (και κάθε ενέργειας) προκύπτει από αυτήν και στο SI είναι: $\mathrm{kgm^2s^{-2}}$, δεν υπεισέρχεται ο αδιάστατος σταθερός συντελεστής $1/2$ ούτε κάποιος άλλος αριθμητικός συντελεστής. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το μέτρο και το δευτερόλεπτο, τα οποία είναι θεμελιώδεις μονάδες στο SI, οπότε το μέτρο ανά δευτερόλεπτο είναι η σύμφωνη παράγωγη μονάδα για την ταχύτητα, αφού για την ταχύτητα υλικού σημείου ισχύει η σχέση $v = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, όπου $\mathrm{d}r$ είναι το στοιχειώδες διάστημα που διανύει το υλικό σημείο σε χρόνο $\mathrm{d}t$. Το εκατοστό ανά δευτερόλεπτο είναι η σύμφωνη παράγωγη μονάδα στα συστήματα μονάδων τύπου CGS (centimeter, gram, second), αλλά δεν είναι σύμφωνη παράγωγη μονάδα στο SI. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι παράγωγη μονάδα στο πλήρες σύστημα SI, διότι είναι δεκαδικό υποπολλαπλάσιο της (σύμφωνης) παράγωγης μονάδας του, που είναι $\mathrm{m/s}$, όπως θα δούμε παρακάτω.

1.1.6 Σύστημα μονάδων (système d'unités; system of units)

Θα μπορούσαν να οριστούν μονάδες μέτρησης για κάθε περίπτωση χωριστά. Αυτό θα οδηγούσε σε πληθώρα σχέσεων μεταξύ μεγεθών με κατάλληλους κάθε φορά πολλαπλασιαστικούς συντελεστές, οπότε θα είχαμε μια τέλεια αναρχία. Για να είναι τα πράγματα πιο απλά, έχει επινοηθεί η έννοια *σύστημα μονάδων*. Αυτό είναι σύστημα που περιλαμβάνει τις θεμελιώδεις μονάδες, τις σύμφωνες παράγωγες μονάδες μαζί με τα δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά τους. Αυτά αναφέρονται σε σύστημα μεγεθών, όπου υπάρχουν οι μεταξύ των μεγεθών σχέσεις.

Σημειώνουμε την έννοια *σύμφωνο σύστημα μονάδων* (système cohérent d'unités; coherent system of units). Πρόκειται για σύστημα μονάδων, βασισμένο σε δεδομένο σύστημα μεγεθών, στο οποίο η μονάδα μέτρησης για την κάθε παράγωγη μονάδα είναι μια σύμφωνη παράγωγη μονάδα. Σε ένα σύμφωνο σύστημα μονάδων, οι εξισώσεις αριθμητικών τιμών έχουν την ίδια μορφή όπως οι αντίστοιχες εξισώσεις μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών αν υπάρχουν. Αυτές οι εξισώσεις μεταξύ μεγεθών είναι ομογενείς εξισώσεις. Συνηθίζεται, χωρίς αυστηρότητα, να λέμε ότι σε κάποιες σχέσεις χρησιμοποιούνται μονάδες του SI, ενώ στην πραγματικότητα εννοούμε ότι χρησιμοποιούνται σύμφωνες παράγωγες ή/και θεμελιώδεις μονάδες του SI.

Υπάρχουν και μονάδες μέτρησης εκτός συστήματος μονάδων (unité hors système; off-system measurement unit). Για παράδειγμα, το ηλεκτρονιοβόλτ (electronvolt), που είναι ίσο με $1{,}602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ J (ακριβώς), είναι μονάδα μέτρησης της ενέργειας που δεν ανήκει στο SI. Επίσης, η ημέρα, η ώρα και το λεπτό δεν ανήκουν στο SI.

1.1.7 Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, SI (Système International d'Unités, SI; International System of Units, SI)

Αυτό είναι σύστημα μονάδων, βασισμένο στο Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (ISQ), τα ονόματά τους και τα σύμβολά τους, όπου συμπεριλαμβάνεται και μια σειρά από (δεκαδικά) προθέματα με τα ονόματά τους και τα σύμβολά τους, μαζί με κανόνες που έχουν καθιερωθεί για τη χρήση τους. Θα δούμε αργότερα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα περί SI. Εδώ απλώς αναφέρουμε ότι αυτό βασίζεται στις επτά θεμελιώδεις ποσότητες (μεγέθη) του ISQ. Τα ονόματα και σύμβολα των αντίστοιχων θεμελιωδών μονάδων φαίνονται παρακάτω στην ειδική παράγραφο περί SI. Οι θεμελιώδεις μονάδες, μαζί με τις σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI, αποτελούν ένα σύμφωνο σύνολο μονάδων, που ονομάζεται *σύνολο σύμφωνων μονάδων SI*. Το μέγεθος *πλήθος οντοτήτων* θεωρείται ότι είναι θεμελιώδης ποσότητα με θεμελιώδη μονάδα το ένα, σύμβολο 1.

Τα προθέματα των μονάδων του SI φαίνονται στην ίδια ειδική παράγραφο περί SI. Το χιλιόμετρο είναι δεκαδικό πολλαπλάσιο του μέτρου. Το χιλιοστόμετρο είναι δεκαδικό υποπολλαπλάσιο του μέτρου. Η ώρα είναι μη δεκαδικό πολλαπλάσιο του δευτερολέπτου.

Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια είναι μονάδες μέτρησης που προέρχονται από άλλες με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση με θετικό ακέραιο. Το σύμφωνο σύνολο μονάδων SI, μαζί με τα (δεκαδικά) πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά τους, δηλαδή με τα σχετικά προθέματα, αποτελούν το πλήρες σύστημα μονάδων SI.

1.1.8 Τιμή μεγέθους, τιμή (valeur d'une grandeur, valeur; quantity value, value of a quantity, value)

Τιμή μεγέθους είναι συνδυασμός ενός αριθμού και μιας αναφοράς που μαζί αποτελούν την ποσοτική έκφραση ενός συγκεκριμένου μεγέθους.

Παραδείγματα είναι:

1. το μήκος μιας ράβδου: 5,34 m ή 534 cm,

2. η θερμοκρασία Κελσίου κάποιου σώματος: $-5\ ℃$,
3. η ηλεκτρική εμπέδηση (ολική αντίσταση ή σύνθετη αντίσταση) ενός στοιχείου κυκλώματος: $(7-3\mathrm{j})\ \Omega$, j είναι η φανταστική μονάδα,
4. η σκληρότητα τύπου C του Rockwell ορισμένου δείγματος (υπό φορτίο 150 kg),
5. 43,5 HRC(150 kg),
6. ο δείκτης διάθλασης ορισμένου δείγματος γυαλιού: 1,32,
7. κλάσμα μάζας καδμίου μέσα σε ορισμένο δείγμα χαλκού: $3\ \mu\mathrm{g/kg}$ ή 3×10^{-9}.

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός μπορεί να είναι θετικός, αρνητικός ή μιγαδικός. Για αυτόν τον αριθμό συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ο όρος *μέτρο* (στα αγγλικά magnitude). Στην περίπτωση που λέμε μέτρο διανύσματος θεωρούμε θετική ποσότητα, απόλυτη τιμή, $|\vec{A}| = \|\vec{A}\| > 0$. Όμως εδώ βλέπουμε ότι μέτρο δεν σημαίνει θετικός αριθμός. Επίσης, ο όρος *μέτρο* χρησιμοποιείται πολλές φορές για να δηλώσει την αριθμητική τιμή μαζί με τη μονάδα μέτρησης, δηλαδή την τιμή ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Για παράδειγμα, λέμε ότι το μέτρο μιας συγκεκριμένης δύναμης είναι F, όπου $F = -21{,}8\ \mathrm{N}$. Δεν χρησιμοποιήσαμε δείκτη, παρόλο που αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη δύναμη. Προφανώς στην περίπτωση αυτή το μείον δηλώνει ότι υπάρχει θετική και αρνητική φορά για τη δύναμη, αλλά δεν συμβολίζουμε τη δύναμη με το σύμβολο του διανύσματος, αλλά τη συμβολίζουμε ως μονόμετρο μέγεθος. Υπάρχει και εδώ πρόβλημα με τους όρους μέτρο ή magnitude. Σε αυτήν την περίπτωση, το F είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{F}$ πάνω σε άξονα (ευθεία) παράλληλη ή συγγραμμική στην $\vec{F}$, που έχει καθορισμένη θετική φορά. Είναι ευνόητο ότι μπορεί η προβολή να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Παρ' όλα αυτά, χρησιμοποιείται ως σύμβολο για το μέτρο διανύσματος (εδώ της δύναμης) το F. Σε τέτοια περίπτωση, είναι αναγκαίο να δίνεται σχετική διευκρίνιση στο κείμενο.

Αξίζει να πούμε το εξής: η τιμή μεγέθους αναφέρεται σε συγκεκριμένη ποσότητα, όπως το μήκος της ράβδου Α. Αυτό σημαίνει ότι για την περίπτωση 1. μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $l_A = 5{,}34\ \mathrm{m}$. Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να δεχτούμε ότι και το σύμβολο l_A παριστάνει την τιμή αυτού του συγκεκριμένου μεγέθους που είναι το 5,34 m.

Για να αποφεύγονται ασάφειες, είναι καλύτερα αντί για μέτρο να χρησιμοποιούμε τον όρο *αριθμητική τιμή* αν δεν υπάρχουν μονάδες, ή *τιμή* (μεγέθους) αν υπάρχουν και μονάδες. Επίσης, καλό είναι να μιλούμε για *απόλυτη τιμή* όταν αναφερόμαστε σε θετική ποσότητα ώστε να μην υπάρχει σύγχυση με τη χρήση του όρου μέτρο. Όπως καταλάβαμε από τα προηγούμενα, στα Μαθηματικά το μέτρο διανύσματος είναι θετική ποσότητα. Στη Φυσική θα μπορούσαμε να αναφερόμαστε στο μέτρο του διανύσματος της δύναμης και να εννοούμε το $|\vec{F}| = |F|$, που ισχύει ακόμη και αν $F < 0$. Είναι κατανοητό πως είναι καλύτερα να αποφεύγεται η χρήση της λέξης μέτρο στα ελληνικά και στα αγγλικά να αποφεύγεται ο όρος magnitude. Επίσης, η λέξη μέτρο εκφράζει και άλλες έννοιες, όπως μπορεί κάποιος να διαπιστώσει σε ελληνικά λεξικά.

1.1.9 Αριθμητική τιμή μεγέθους (valeur numérique, valeur numérique d'une grandeur; numerical quantity value, numerical value of a quantity, numerical value)

Πρόκειται για αριθμό που υπάρχει στην τιμή του μεγέθους, εκτός από τους αριθμούς που σχετίζονται με την αναφορά. Παραδείγματα για τις προηγούμενες περιπτώσεις 1., 2. 3. κτλ. είναι τα παρακάτω:

1. 5,34 ή 534 αντιστοίχως
2. -5
3. 7-3j
4. 43,5
5. 1,32

Αν γράψουμε $3\,\mu g/kg$, τότε η αριθμητική τιμή είναι 3, παρόλο που η μονάδα $\mu g/kg$ ισούται αριθμητικά με 10^{-9}, διότι αυτός ο αριθμός είναι μέρος της αναφοράς που εδώ είναι η μονάδα μέτρησης. Αν γράψουμε 3×10^{-9}, τότε η αριθμητική τιμή είναι 3×10^{-9}. Ανάλογο ισχύει και για την περίπτωση 1.

1.1.10 Εξίσωση μεγεθών (équation aux grandeurs; quantity equation)

Εξισώσεις μεγεθών στη Φυσική είναι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (μεγεθών) ενός συστήματος μεγεθών. Αυτές ισχύουν ανεξάρτητα από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται. Όπως είπαμε προηγουμένως και θα δούμε παρακάτω, αυτές είναι ομογενείς εξισώσεις.

1.1.11 Εξίσωση αριθμητικών τιμών (équation aux valeurs numériques; numerical value equation, numerical quantity value equation)

Αυτή είναι μαθηματική σχέση μεταξύ αριθμητικών τιμών ποσοτήτων, που στηρίζεται σε δεδομένη εξίσωση μεγεθών και καθορισμένες μονάδες μέτρησης. Θα δούμε παρακάτω τα σχετικά με τον συμβολισμό.

1.2 Συστήματα μεγεθών και μονάδων

Θα ασχοληθούμε με φυσικά μεγέθη (φυσικές ποσότητες) που ανήκουν σε (συνήθη) συστήματα μεγεθών, δηλαδή δεν είναι μεγέθη κατάταξης, οπότε η αναφορά είναι η μονάδα μέτρησης, και επομένως τα μεγέθη χαρακτηρίζονται από αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης. Η αριθμητική τιμή και η μονάδα μέτρησης αποτελούν την τιμή του μεγέθους. Για παράδειγμα, η τιμή της επιτάχυνσης συγκεκριμένου υλικού σημείου είναι $a = -45{,}2\ \mathrm{m/s^2}$, όπου η αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης είναι $-45{,}2$. Σύμφωνα με όσα είπαμε για την αποφυγή της χρήσης του όρου μέτρο στα ελληνικά, θα δεχόμαστε ότι το σύμβολο a μπορεί να παριστάνει το συγκεκριμένο φυσικό μέγεθος ή την τιμή του. Τονίζουμε ξανά ότι η αριθμητική τιμή είναι καθαρός αριθμός, ενώ η τιμή του μεγέθους έχει και μονάδα μέτρησης. Αναφέρουμε ότι τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών (και των τιμών τους) είναι πλάγια, ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι όρθια.

Το μέγεθος (ή η τιμή του για συγκεκριμένη περίπτωση), A ισούται με το γινόμενο της αριθμητικής τιμής του επί την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης $A = \{A\}[A]$.

A είναι η φυσική ποσότητα ή η τιμή της, $\{A\}$ είναι η αριθμητική τιμή της και $[A]$ η μονάδα μέτρησής της. Για την ανωτέρω περίπτωση της επιτάχυνσης έχουμε $A = a$, $\{a\} = -42{,}2$, $[a] = \mathrm{m/s^2}$. Η αριθμητική τιμή εξαρτάται από το σύστημα μονάδων μέτρησης, οπότε μπορεί να χρειαστεί αυτό να δηλώνεται με κάποιον δείκτη, $A = \{A\}_{[A]}[A]$. Επίσης, μπορεί να χρειαστεί τέτοιος δείκτης και για το $[A]$ π.χ. $[a]_{\mathrm{SI}} = \mathrm{ms^{-2}}$ και $[a]_{\mathrm{CGS}} = \mathrm{cm}s^{-2}$. Όταν δεν χρησιμοποιείται δείκτης, οι μονάδες κατανοούνται από τα συμφραζόμενα. Επίσης, μπορεί να θέλουμε να τονίσουμε πως η σχέση ισχύει για κάθε σύμφωνο σύστημα μονάδων.

Κατά τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση μεγεθών ισχύουν οι γνωστοί κανόνες της άλγεβρας για τις αριθμητικές τιμές και για τις μονάδες, δηλαδή:

$$AB = \{A\}[A]\{B\}[B] = \{A\}\{B\}[A][B] = \{AB\}[AB],$$

και

$$\frac{A}{B} = \frac{\{A\}[A]}{\{B\}[B]} = \left\{\frac{A}{B}\right\}\left[\frac{A}{B}\right]$$

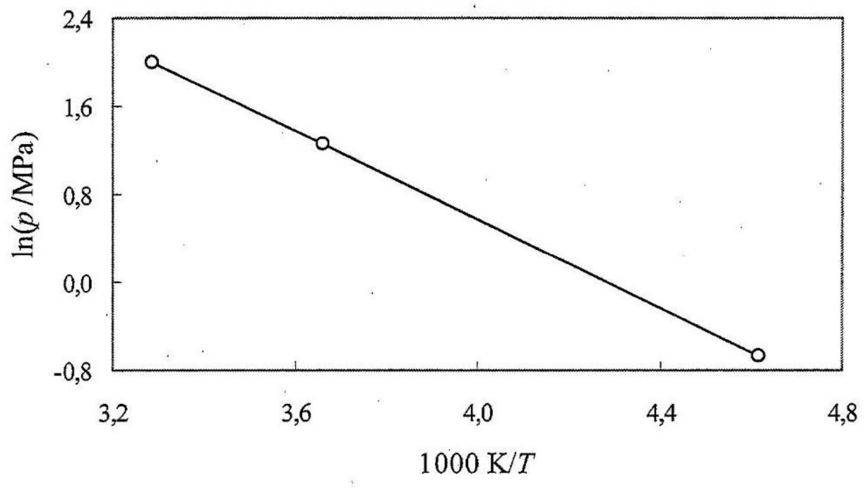
Για παράδειγμα, $\upsilon = -8{,}1\ \mathrm{m/s}$, $t = 21\ \mathrm{s}$, $\upsilon t = (-8{,}1 \times 21) \times (\mathrm{m/s}) \times \mathrm{s} = -1{,}7 \times 10^2\ \mathrm{m}$.

Η αριθμητική τιμή $\{A\}$ του μεγέθους A δίνεται από τη σχέση $\{A\} = A/[A]$. Στην παραπάνω περίπτωση με την επιτάχυνση έχουμε $\{a\} = (-42{,}2\ \mathrm{m/s^2})/(\mathrm{m/s^2}) = -42{,}2$. Τα τελευταία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι μεταξύ μονάδων και αριθμητικών τιμών επιτρέπονται οι συνήθεις αλγεβρικές πράξεις, όπως πολλαπλασιασμός, διαίρεση κτλ., μας οδηγούν να χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό σε πίνακες και σε γραφικές παραστάσεις. Αυτό είναι σε αρμονία με το γεγονός ότι στους άξονες και στους πίνακες εμφανίζονται αριθμητικές τιμές μεγεθών και όχι μεγέθη. Στον Πίνακα 1.1 δίνονται στοιχεία για την πίεση ατμού σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία και ο φυσικός λογάριθμος της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.

Πίνακας 1.1 *Πίεση ατμού ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.*

T/K	10^3 K/T	p/MPa	ln(p/MPa)
216,55	4,6179	0,5180	−0,6578
273,15	3,6610	3,4853	1,2486
304,19	3,2874	7,3815	1,9990

Το γράφημα στο Σχήμα 1.1, είναι για τον φυσικό λογάριθμο της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1.1 *Φυσικός λογάριθμος πίεσης ατμού ως συνάρτηση του αντίστροφου της θερμοκρασίας.*

1.2.1 Σχέσεις μεταξύ μεγεθών και σχέσεις μεταξύ αριθμητικών τιμών

Έχουμε εξισώσεις μεταξύ μεγεθών όπως τη σχέση $\upsilon = l/t$. Τέτοιες εξισώσεις, οι οποίες είναι πάντα ομογενείς, είναι ανεξάρτητες από το ποιες είναι οι θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Επίσης έχουμε εξισώσεις αριθμητικών τιμών, που δεν στηρίζονται σε συγκεκριμένες θεμελιώδεις μονάδες, όπως η παρακάτω, η οποία αντιστοιχεί στην προηγούμενη, $\{\upsilon\}_{\mathrm{km/h}} = 3{,}6\ \{l\}_{\mathrm{m}}/\{t\}_{\mathrm{s}}$. Το 3,6 ονομάζεται *εμπειρικός συντελεστής* (πολλαπλασιαστής). Το l μετριέται σε μέτρα, ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και η ταχύτητα σε $\mathrm{km/h}$. Τέτοιες σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων εξαρτώνται από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται κάθε φορά για τις διάφορες ποσότητες. Οι μονάδες πρέπει να δηλώνονται ως δείκτες ή να γίνεται σαφής σχετική αναφορά στο κείμενο.

Σημειώνουμε ξανά ότι έχουμε σύμφωνο (coherent) σύστημα μονάδων αν η επιλογή των παράγωγων μονάδων είναι τέτοια που οι σχέσεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών να είναι ακριβώς ίδια με τη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων φυσικών μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών αν υπάρχουν. Αυτές οι σωστές σχέσεις μεταξύ των φυσικών μεγεθών είναι ομογενείς. Δείτε ότι αυτό ισχύει για την προηγούμενη πολύ απλή σχέση για την ταχύτητα. Αυτή ισχύει αν θεμελιώδεις μονάδες είναι το m και το s, με σύμφωνη παράγωγη μονάδα ταχύτητας το m/s. Η ίδια σχέση ισχύει αν θεμελιώδεις μονάδες είναι τα cm, s, με σύμφωνη παράγωγη μονάδα ταχύτητας το cm/s. Αν θεμελιώδεις μονάδες είναι το km και η ώρα, h, και μονάδα ταχύτητας το km/h. Όλα τα συστήματα μονάδων που έχουν χρησιμοποιηθεί ή χρησιμοποιούνται, είναι σύμφωνα συστήματα.

1.2.2 Διάσταση ή διαστάσεις μεγέθους

Οι εξισώσεις της Φυσικής είναι σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα και αναφέρονται σε κάποιο σύστημα φυσικών μεγεθών. Αυτές οι σχέσεις μπορεί να περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικές σταθερές. Τα διάφορα συστήματα φυσικών μεγεθών μπορεί να έχουν σχέσεις που διαφέρουν ως προς τις σταθερές. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι πολλές σχέσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού στο γκαουσιανό (gaussian) σύστημα και στο SI. Ως παράδειγμα, για τη δύναμη Lorentz έχουμε αντιστοίχως τις σχέσεις $\vec{F} = q\vec{E} + q\dfrac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}$ και $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$. Σημειώνουμε ότι η εξάρτηση από τα φυσικά μεγέθη φορτίο, πεδίο $\vec{E}$, ταχύτητα και πεδίο $\vec{B}$ είναι φυσιολογικό να είναι η ίδια και για τα δύο συστήματα, αλλά υπάρχει διαφορά στους πολλαπλασιαστικούς συντελεστές. Η ίδια εξάρτηση που βλέπουμε είναι γεγονός αναμενόμενο, γιατί η «φυσική» που διέπει τη σχέση, το φαινόμενο, δεν μπορεί να εξαρτάται από το σύστημα περιγραφής. Στην παραπάνω περίπτωση, για την ηλεκτρική δύναμη η σχέση είναι ακριβώς η ίδια για τα δύο συστήματα, δηλαδή $q\vec{E}$, ενώ για τη μαγνητική δύναμη έχουμε $q\dfrac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}$ και $q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ αντιστοίχως.

Όπως είπαμε προηγουμένως, λαμβάνεται αυθαίρετα ένα κατάλληλο πλήθος από τα μεγέθη του συστήματος (μεγεθών), τα οποία θεωρούνται ως ανεξάρτητα και ονομάζονται *θεμελιώδη μεγέθη* (ή μεγέθη αναφοράς), ενώ οι αντίστοιχες μονάδες τους είναι οι *θεμελιώδεις μονάδες* (μονάδες αναφοράς). Όλα τα άλλα μεγέθη αυτού του συστήματος και οι μονάδες τους είναι παράγωγα μεγέθη και παράγωγες μονάδες αντιστοίχως. Τα παράγωγα μεγέθη σχετίζονται με τα θεμελιώδη με τις μαθηματικές σχέσεις που αναφέραμε προηγουμένως. Γενικώς δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσα και ποια μεγέθη μπορεί να θεωρηθούν ως θεμελιώδη, αρκεί να μην οδηγούν σε ασυνέπειες (αντιφάσεις).

Μια χαρακτηριστική περίπτωση είναι η περιοχή των Στοιχειωδών Σωματιδίων, όπου συνήθως όλα τα μεγέθη μετριούνται με μία μόνο μονάδα υψωμένη σε κάποια δύναμη, για παράδειγμα τη μονάδα της ενέργειας που συνήθως είναι το GeV. Σε αυτήν την περίπτωση οι διάφορες σχέσεις παίρνουν κατάλληλη μορφή και οι σταθερές ταχύτητας του φωτός στο κενό και η ανηγμένη σταθερά του Planck, θεωρούνται αδιάστατες με τιμή ίση με τη μονάδα. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *Φυσικά Συστήματα Μονάδων*.

Όπως θα δούμε καλύτερα σε άλλο σημείο αυτού του βιβλίου, για την τιμή κάθε παράγωγου φυσικού μεγέθους, q, ισχύει, $q = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} A_3^{\alpha_3} ... A_n^{\alpha_n} \sum_{i=1}^{N} a_i$, όπου τα A είναι οι τιμές των n θεμελιωδών μεγεθών και τα a είναι N σταθεροί αριθμοί, όπου το N να είναι και άπειρο. Αυτή είναι σχέση μεταξύ τιμών όπου περιλαμβάνονται αριθμητικές τιμές και μονάδες. Από αυτήν τη σχέση προκύπτει μια σχέση η οποία δεν αναφέρεται σε τιμές μεγεθών, αλλά είναι σχέση που αναφέρεται κατά κάποιο τρόπο στη φύση των μεγεθών, η οποία δεν είναι κάτι απόλυτο, αλλά σχετίζεται με το σύστημα μεγεθών στο οποίο εργαζόμαστε και με το ποια είναι τα θεμελιώδη μεγέθη. Για τα θεμελιώδη μεγέθη ορίζουμε τη διάσταση του καθενός με τα αντίστοιχα σύμβολα $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, ..., \mathsf{A}_n$. Σύμφωνα με τον ISO, τα σύμβολα που παριστάνουν τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών είναι όρθια και Sans Serif (εδώ χρησιμοποιήσαμε τη γραμματοσειρά Calibri Light). Στην πράξη, όμως, δεν ακολουθείται αυστηρά αυτός ο κανόνας. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του συμβολισμού για τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών που θα δούμε παρακάτω. Είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα κεφαλαία και όρθια (όχι Sans Serif) ή ακόμη κεφαλαία και πλάγια (όχι Sans Serif). Σε αυτό το πόνημα θα ακολουθούμε για τον συμβολισμό των διαστάσεων των θεμελιωδών μεγεθών τις δύο εναλλακτικές με κεφαλαία όρθια.

Για το παράγωγο μέγεθος q, η διάστασή του προκύπτει από την παραπάνω σχέση, όπου δεν λαμβάνονται υπόψη οι αριθμητικοί συντελεστές, οπότε έχουμε έναν όρο. Ισχύει για τη διάσταση το

$$\dim\, q = \mathsf{A}_1^{\alpha_1}\mathsf{A}_2^{\alpha_2}\mathsf{A}_3^{\alpha_3}\ldots\mathsf{A}_n^{\alpha_n}$$

Οι εκθέτες είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Η σχέση είναι συμβολική: δεν είναι σύνηθες γινόμενο αλγεβρικών ποσοτήτων, παρόλο που ισχύουν οι συνηθισμένες ιδιότητες της άλγεβρας.

Η λεγόμενη σύμφωνη μονάδα του παράγωγου μεγέθους q που παριστάνεται με $[q]$ και αναφέρεται σε συγκεκριμένη επιλογή θεμελιωδών μονάδων βρίσκεται από την τελευταία σχέση θέτοντας στη θέση του κάθε συμβόλου για την αντίστοιχη θεμελιώδη διάσταση την αντίστοιχη θεμελιώδη μονάδα. Έτσι έχουμε:

$$[q] = [A_1]^{\alpha_1}[A_2]^{\alpha_2}[A_3]^{\alpha_3}\ldots[A_n]^{\alpha_n}$$

Δηλαδή η σύμφωνη παράγωγη μονάδα είναι γινόμενο των μονάδων των θεμελιωδών μεγεθών υψωμένων σε κάποια δύναμη (εκθέτη). Οι δυνάμεις είναι οι διαστατικοί εκθέτες που αναφέραμε προηγουμένως. Αυτό το θεωρούμε ευνόητο εμπειρικά, αλλά προκύπτει με πιο αυστηρό μαθηματικό τρόπο από τη λεγόμενη απαίτηση, την οποία ο Bridgman ονόμασε *αρχή της απόλυτης σημασίας της σχετικής τιμής* (absolute significance of relative magnitude). Αυτή η απαίτηση λέει: το πηλίκο (ο λόγος) των αριθμητικών τιμών δύο συγκεκριμένων μεγεθών ίδιου είδους δεν εξαρτάται από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα, έστω ότι τα μήκη δύο συγκεκριμένων ράβδων μετριούνται σε μέτρα (m), η μια έχει μήκος $l_1 = 3{,}4$ m και η άλλη $l_2 = 6{,}8$ m. Στη συνέχεια μετριούνται σε εκατοστόμετρα (cm), οπότε έχουμε $l_1' = 3{,}4 \times 10^2$ cm και $l_2' = 6{,}8 \times 10^2$ cm. Είναι σαφές ότι οι λόγοι των αριθμητικών τιμών είναι ίδιοι και για τις δύο περιπτώσεις: $3{,}4/6{,}8 = 3{,}4 \times 10^2/(6{,}8 \times 10^2) = 0{,}5$. Αυτή η απλή απαίτηση με κάποια μαθηματική διαδικασία οδηγεί στο ότι για τη μονάδα, $[q]$, του παράγωγου μεγέθους, q, ισχύει,

$$[q] = k[A_1]^{\alpha_1}[A_2]^{\alpha_2}[A_3]^{\alpha_3}\ldots[A_n]^{\alpha_n}$$

Τα $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ είναι τα θεμελιώδη μεγέθη και μπορεί να εισαχθεί και ένας αριθμητικός συντελεστής k, μια αδιάστατη σταθερά. Στην περίπτωση των σύμφωνων παράγωγων μονάδων $k = 1$. Για παράδειγμα, για τη σύμφωνη μονάδα ταχύτητας ισχύει $[\upsilon] = [l]^1[t]^{-1}$. Αν οι θεμελιώδεις μονάδες για το μήκος και τον χρόνο είναι το m και το s, τότε για τη σύμφωνη μονάδα ταχύτητας έχουμε $[\upsilon] = \mathrm{m\,s^{-1}}$. Αν οι θεμελιώδεις μονάδες είναι το μm και η h (ώρα), τότε για τη σύμφωνη μονάδα ταχύτητας έχουμε $[\upsilon] = \mathrm{\mu m\,h^{-1}}$.

Μια ποσότητα έχει διάσταση 1 αν οι διαστατικοί εκθέτες της είναι όλοι μηδέν. Για ιστορικούς λόγους η ποσότητα ονομάζεται *αδιάστατη*, ενώ στην πραγματικότητα έχει διάσταση 1. Πράγματι έχουμε $\text{διάσταση} = \mathsf{A}_1^0\mathsf{A}_2^0\ldots = 1 \times 1 \times \ldots = 1$. Σημειώνουμε ξανά πως οι μονάδες προκύπτουν με χρήση της σχέσης μεταξύ του συγκεκριμένου (ειδικού) παράγωγου μεγέθους ως προς τα θεμελιώδη μεγέθη. Στον καθορισμό των μονάδων και των διαστάσεων δεν συμπεριλαμβάνονται αριθμητικοί (δηλαδή αδιάστατοι) συντελεστές που μπορεί να υπάρχουν στις εξισώσεις μεγεθών.

Παρόλο που οι διαστάσεις και οι μονάδες σχετίζονται όπως είδαμε παραπάνω, οι διαστάσεις είναι πιο γενικές έννοιες από τις μονάδες, αφού οι διαστάσεις εξαρτώνται από το σύστημα μεγεθών, ενώ οι μονάδες από το σύστημα μονάδων που είναι κάτι πιο ειδικό. Η διάσταση της ταχύτητας στο SI και τα CGS είναι LT^{-1}, ενώ η (σύμφωνη) μονάδα της στο SI είναι $\mathrm{m/s}$ και στα CGS $\mathrm{cm/s}$. Μπορεί να υπάρχουν παράγωγες μονάδες σε δύο διαφορετικά συστήματα τύπου CGS που εκφράζονται ως προς τις θεμελιώδεις μονάδες με τα ίδια σύμβολα, αλλά να μην είναι μεταξύ τους ίσες. Αυτό συμβαίνει διότι τα δύο συστήματα σχετίζονται με διαφορετικά συστήματα μεγεθών, δηλαδή έχουν, γενικώς, διαφορετικές εξισώσεις. Για το ISQ θα μπορούσαμε να έχουμε ορίσει άλλες θεμελιώδεις μονάδες (αυτό δεν θα λεγόταν SI), τότε οι (σύμφωνες) παράγωγες μονάδες θα ήταν διαφορετικές, ενώ οι διαστάσεις τους δεν θα άλλαζαν. Επαναλαμβάνουμε ότι το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) στηρίζεται στο ISQ, αυτό καθορίζει τις διαστάσεις των μεγεθών του. Συγκεκριμένα, στο SI τα θεμελιώδη μεγέθη είναι ο χρόνος t, το μήκος l, L, η μάζα m, το (ηλεκτρικό) ρεύμα I, i, η θερμοδυναμική θερμοκρασία (απόλυτη θερμοκρασία) T, το ποσό ουσίας n, η φωτοβολία ή φωτεινή ροή I_V, οι διαστάσεις τους παριστάνονται με τα εξής αντίστοιχα σύμβολα $\mathsf{T}, \mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{I}, \Theta, \mathsf{N}, \mathsf{J}$. Συχνά θα κάνουμε χρήση τους στη μορφή $\mathrm{T, L, M, I, \Theta, N, J}$. Αργότερα θα αναφερθούμε σε συμβολισμό για τις διαστάσεις παράγωγων μεγεθών που διευκολύνει στην πράξη και γι' αυτό χρησιμοποιείται ευρέως στη βιβλιογραφία. Όταν αναφερόμαστε σε μέγεθος με την ιδιότητά του ως θεμελιώδους, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε για αυτά τα (πλάγια) σύμβολα T, L, M, I, Θ, N, J. Αυτό είναι χρήσιμο, γιατί ένα φαινόμενο μπορεί να εξαρτάται από την ακτίνα r κάποιας σφαίρας, από το ύψος h ενός κτηρίου, από τη μάζα m_1 μιας δεξαμενής νερού, από τη μάζα m_2 ενός ανθρώπου κτλ. Είναι σαφές πως με αυτήν την επιλογή τα r, h ως θεμελιώδη μεγέθη παριστάνονται με το ίδιο σύμβολο, το L. Συνήθως χρησιμοποιούμε τα τρία ή το πολύ τα τέσσερα πρώτα σύμβολα. Ο ίδιος συμβολισμός ισχύει για τα τρία πρώτα και στα συστήματα τύπου CGS. Σημειώνουμε πως μπορούμε να αναφερόμαστε σε θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη γενικότερα, ανεξάρτητα από τις δύο αυτές κατηγορίες συστημάτων μονάδων.

Στον Πίνακα 1.2 φαίνονται οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών του SI και οι μονάδες τους. Οι θεμελιώδεις μονάδες, όπως και τα θεμελιώδη μεγέθη, αποτελούν πλήρες σύστημα ως προς το οποίο μπορούν να εκφραστούν τα παράγωγα μεγέθη και οι μονάδες των παράγωγων μεγεθών, δηλαδή οι παράγωγες μονάδες.

Πίνακας 1.2 *Οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών και οι μονάδες τους.*

Διάσταση → μονάδα
T → s
L → m
M → kg
I → A
Θ → K
N → mol
J → cd

Στον Πίνακα 1.3 φαίνονται παραδείγματα διαστάσεων μεγεθών στο SI.

Πίνακας 1.3 *Παραδείγματα διαστάσεων μεγεθών στο SI.*

Μέγεθος	**Διάσταση**
Ταχύτητα	$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{L}$
Γωνιακή ταχύτητα	T^{-1}
Δύναμη	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{LM}$
Γραμμομοριακή εντροπία	$\mathrm{T}^{-2}\mathrm{L}^{2}\mathrm{M}\Theta^{-1}\mathrm{N}^{-1}$
Σχετική πυκνότητα	1

Όπως έχουμε ξαναπεί, οι σωστές εξισώσεις που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα είναι ομογενείς. Αν υπάρχουν αθροίσματα όρων, πρέπει όλοι οι όροι να έχουν ίδιες διαστάσεις και προφανώς το ίδιο πρέπει να ισχύει για το αριστερό και το δεξιό μέλος. Στη διαστατική ανάλυση (dimensional analysis) μια εξίσωση μπορεί να οριστεί ως διαστατικά ομογενής, αν έχει μορφή που δεν εξαρτάται από τις θεμελιώδεις μονάδες. Η ομογένεια μάς επιτρέπει να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας, δηλαδή, αν μια σχέση που βρήκαμε δεν είναι ομογενής, τότε σίγουρα είναι λάθος, δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο. Μπορούν να προστεθούν και να αφαιρεθούν μόνο μεγέθη και εκφράσεις μεγεθών με ίδια διάσταση και μόνο αν είναι ίδιου είδους - δεν προστίθενται πορτοκάλια με χταπόδια. Η ροπή και η ενέργεια έχουν ίδιες διαστάσεις, αλλά δεν μπορεί να προστεθούν, διότι είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Μπορούμε να προσθέσουμε μεγέθη (τιμές μεγεθών) με διαφορετικές μονάδες, αλλά δεν μπορούμε να προσθέσουμε τις αριθμητικές τιμές τους. Για παράδειγμα, γράφουμε $\upsilon = 5{,}3\ \mathrm{kms}^{-1} + 2{,}5\ \mathrm{cmh}^{-1}$, αλλά δεν μπορούμε να πούμε πως η αριθμητική τιμή $\{\upsilon\}$ είναι το άθροισμα 5,3+2,5.

Υπάρχουν 22 σύμφωνες παράγωγες μονάδες που έχουν ειδικά ονόματα, π.χ. η μονάδα πίεσης pascal (Pa), $1\ \mathrm{Pa} = 1\mathrm{N}/\mathrm{m}^2 = 1\mathrm{kg}/(\mathrm{m\,s}^2)$. Στον Πίνακα 1.4 φαίνονται αυτές οι 22 παράγωγες μονάδες. Δίνονται το μέγεθος στο οποίο αναφέρεται η μονάδα στα ελληνικά, το όνομα της μονάδας στα αγγλικά και στα ελληνικά, επίσης το (διεθνές) σύμβολο της μονάδας και ισοδύναμες μορφές της μονάδας. Τονίζουμε ξανά ότι τα σύμβολα των μεγεθών είναι με πλάγια γράμματα, ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι με όρθια γράμματα και δεν έχουν πληθυντικό. Τα ονόματα των μεγεθών και των μονάδων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες. Δίνονται ενδεικτικά (διεθνή) σύμβολα για τα διάφορα μεγέθη, τα οποία δεν είναι υποχρεωτικά. Αν όμως χρησιμοποιούνται διαφορετικά σύμβολα, αυτό πρέπει να τονίζεται στο κείμενο. Τα σύμβολα όμως των μονάδων είναι υποχρεωτικά και είναι τα ίδια σε όλες τις γλώσσες.

Πίνακας 1.4 *Οι 22 σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI που έχουν ειδικά ονόματα και σύμβολα.*

	Σύμφωνες παράγωγες μονάδες του SI			
	Όνομα	**Σύμβολο**	**Έκφραση ως προς άλλες μονάδες του SI**	**Έκφραση ως προς θεμελιώδεις μονάδες του SI**
επίπεδη γωνία	radian, ακτίνιο	rad	1	m/m
στερεά γωνία	steradian, στερακτίνιο	sr	1	$\mathrm{m}^2/\mathrm{m}^2$
συχνότητα	hertz, χερτζ	Hz		s^{-1}

δύναμη	newton, νιούτον	N		kg m s^{-2}
πίεση, (μηχανική) τάση	pascal, πασκάλ	Pa	N/m^2	kg m^{-1} s^{-2}
ενέργεια, έργο, ποσό θερμότητας	joule, τζουλ	J	N m	kg m^2 s^{-2}
ισχύς, ροή (ισχύς) ακτινοβολίας	watt, βατ	W	J/s	kg m^2 s^{-3}
ηλεκτρικό φορτίο	coulomb, κουλόμπ	C		A s
(ηλεκτρική) διαφορά δυναμικού, (ηλεκτρική) τάση, ηλεκτρεγερτική δύναμη	volt, βολτ	V	W/A	kg m^2 s^{-3} A^{-1}
χωρητικότητα	farad, φαράντ	F	C/V	kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2
ηλεκτρική αντίσταση	ohm, ωμ	Ω	V/A	kg m^2 s^{-3} A^{-2}
ηλεκτρική αγωγιμότητα	siemens, ζήμενς	S	A/V	kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2
μαγνητική ροή	weber, βέμπερ	Wb	V s	kg m^2 s^{-2} A^{-1}
πυκνότητα μαγνητικής ροής	tesla, τέσλα	T	Wb/m^2	kg s^{-2} A^{-1}
επαγωγή (συντελεστής)	henry, χένρυ	H	Wb/A	kg m^2 s^{-2} A^{-2}
θερμοκρασία Κελσίου	degree Celsius, βαθμός Κελσίου	°C		K
φωτεινή ροή, φωτεινή ισχύς	lumen, λούμεν	lm	cd sr	cd sr
φωτισμός, φωτεινότητα	lux, λουξ	lx	Lm/m^2	cd sr m^{-2}
ενεργότητα (ραδιονουκλίδιου)	becquerel, μπεκερέλ	Bq		s^{-1}
απορροφούμενη δόση	gray, γκρέυ	Gy	J/kg	m^2 s^{-2}
ισοδύναμη δόση	sievert, σίβερτ	Sv	J/kg	m^2 s^{-2}
καταλυτική ενεργότητα (δραστικότητα)	katal, κατάλ	kat		mol s^{-1}

Η Διεθνής Επιτροπή Ηλεκτροτεχνίας (International Electrotechnical Commission, IEC) έχει εισαγάγει το var (σύμβολο var) ως ειδικό όνομα για τη μονάδα της άεργης ισχύος (reactive power). Σε σχέση με τις σύμφωνες μονάδες του SI, το var είναι ίδιο με το volt ampere. Στα αγγλικά λέμε, volt ampere reactive, var.

1.3 Ορισμοί των μονάδων του SI

Πριν την καθιέρωση των νέων ορισμών κατά το έτος 2018 (μπήκαν σε χρήση από τις 20 Μαΐου 2019), το SI (Système International d'Unités, Διεθνές Σύστημα Μονάδων) οριζόταν με βάση επτά θεμελιώδεις μονάδες (μονάδες αναφοράς). Από αυτές τις θεμελιώδεις μονάδες φτιάχνονταν οι σύμφωνες παράγωγες μονάδες ως γινόμενα δυνάμεων των θεμελιωδών μονάδων. Μετά τον Μάιο του 2019, το σύστημα μονάδων του SI ορίζεται με τη χρήση επτά σταθερών ορισμού (θεμελιώδεις σταθερές), των οποίων οι αριθμητικές τιμές λαμβάνονται να είναι ακριβώς καθορισμένες, χωρίς αβεβαιότητα. Θα μπορούσαν να δοθούν αυθαίρετες τιμές στις σταθερές και να οριστούν καινούργιες μονάδες μέτρησης με καινούργια ονόματα. Όμως ενδιαφέρει σε κάθε τέτοια αλλαγή να μην διαταραχτεί το προηγούμενο χρησιμοποιούμενο σύστημα. Αυτή είναι η αιτία που οι σταθερές ορισμού πήραν τις ακριβέστερες τιμές που υπήρχαν για αυτές κατά τον χρόνο της μετάβασης. Έγινε έτσι μια ομαλή μεταβολή που δεν έγινε αισθητή για τις πλείστες περιπτώσεις.

Οι μονάδες μέτρησης στηρίζονται έμμεσα ή άμεσα σε κάποιες ποσότητες που θεωρούνται σταθερές. Οι παλιές μέθοδοι ορισμού των μονάδων του SI είναι μέθοδοι ορισμού ρητών (άμεσων)-μονάδων (explicit-unit definition), δηλαδή σε αυτές έχουμε άμεσο ορισμό των μονάδων και οι τιμές των εμπλεκόμενων σταθερών προκύπτουν έμμεσα. Η νέα μέθοδος είναι μέθοδος ορισμού ρητών (άμεσων)-σταθερών, δηλαδή ορίζονται οι σταθερές και από αυτές προκύπτουν οι μονάδες. Μπορούμε να καταλάβουμε τις διαφορές με απλό τρόπο αν περιοριστούμε στην περίπτωση του μέτρου (m). Ο προηγούμενος ορισμός, μετά το 1983, ήταν: *Το μέτρο είναι το μήκος που διανύει το φως στο κενό κατά το χρονικό διάστημα* 1/299 792 458 *του δευτερολέπτου*. Δηλαδή το μέτρο ορίζεται ως προς μια ομοειδή του ποσότητα, που είναι το μήκος που διανύει το φως σε ορισμένο χρόνο. Εξυπακούεται πως έχει οριστεί η μονάδα του χρόνου, δηλαδή το δευτερόλεπτο. Αφού ισχύει ότι $l = ct$, προκύπτει ότι:

$$1\ \mathrm{m} = c\frac{1\mathrm{s}}{299\ 792\ 458}$$

οπότε $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{ms}^{-1}$. Η σταθερά έχει ακριβή τιμή, αλλά τυπικά προκύπτει από τον ορισμό. Μια πιο προσεκτική ματιά μας λέει ότι ο ορισμός καθορίζει τη μονάδα ms^{-1} και το μέτρο προκύπτει επειδή έχει οριστεί το δευτερόλεπτο. Αν πάμε πριν το 1983, τα πράγματα ήταν διαφορετικά. Το μέτρο οριζόταν ως προς το μήκος κύματος μιας συγκεκριμένης γραμμής του φάσματος του ατόμου του κρυπτού και το δευτερόλεπτο οριζόταν ως προς τη συχνότητα μιας υπέρλεπτης μετάπτωσης του κεσίου. Σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή της ταχύτητας του φωτός προσδιοριζόταν πειραματικά και είχε κάποια αβεβαιότητα.

Η μέθοδος των άμεσων-σταθερών μπορεί να γίνει κατανοητή ως εξής: Για την τιμή της σταθεράς Q έχουμε τη γνωστή σχέση, $Q = \{Q\}_{[Q]}[Q]$. Το Q θεωρείται ως αναλλοίωτο μέγεθος. Αν είναι γνωστό με κάποιες μονάδες, είναι γνωστό για κάθε άλλες μονάδες, αρκεί να ξέρουμε πώς αυτές μετασχηματίζονται μεταξύ τους. Οι παράγοντες του γινομένου μεταβάλλονται, αλλά το γινόμενό τους νοείται αναλλοίωτο. Μπορούμε να γράψουμε για τη μονάδα

$$[Q] = \frac{Q}{\{Q\}_{[Q]}}$$

Η μονάδα $[Q]$ ορίζεται ως το πηλίκο της αναλλοίωτης ποσότητας και μιας ακριβούς αριθμητικής τιμής. Εδώ η αριθμητική τιμή αναφέρεται σε μονάδες του SI. Η αναλλοίωτη σταθερά (θεμελιώδης σταθερά) μπορεί να είναι, για παράδειγμα, ιδιότητα κάποιου ατόμου ή μια βασική φυσική σταθερά. Με απλά λόγια, καθορίζοντας ακριβώς την αριθμητική τιμή μιας αναλλοίωτης ποσότητας, ορίζουμε τη μονάδα της.

Η χρήση θεμελιωδών σταθερών αντί για (θεμελιώδεις) μονάδες ορισμού, έχει ως αποτέλεσμα να μην χρειάζεται η διάκριση μεταξύ θεμελιωδών και παράγωγων μονάδων, διότι όλες οι μονάδες είναι δυνατόν να φτιαχτούν άμεσα από τις σταθερές ορισμού. Παρ᾽ όλα αυτά, διατηρείται η έννοια των θεμελιωδών και των παράγωγων μονάδων, διότι αυτό είναι χρήσιμο και επίσης είναι καλά καθιερωμένο ιστορικά, οπότε είναι αναγκαίο για να διατηρηθεί η συνέπεια με το Διεθνές Σύστημα Μεγεθών (ISQ, International System of Quantities), το οποίο έχει οριστεί στις σειρές ISO/IEC 80 000 του Διεθνούς Οργανισμού Τυποποίησης (ISO, International Organization of Standardization). Εκεί ορίζονται θεμελιώδη και παράγωγα μεγέθη, στα οποία κατ' ανάγκη αντιστοιχούν οι θεμελιώδεις και παράγωγες μονάδες του SI.

Αναφέρουμε εδώ ότι χρησιμοποιούνται μονάδες για μεγέθη που περιγράφουν φαινόμενα της βιολογίας και της φυσιολογίας, οι οποίες δεν ανήκουν στο SI. Εδώ δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες περιπτώσεις. Για την περίπτωση της βιολογικής δράσης ουσιών που χρησιμοποιούνται για ιατρική διάγνωση και θεραπεία, μέχρι σήμερα δεν είναι δυνατόν να οριστούν μονάδες που να σχετίζονται με τις μονάδες του SI. Η βιολογική δράση αυτών των ουσιών στους οργανισμούς είναι πολύπλοκη και δεν είναι δυνατή η ποσοτικοποίησή της σε σχέση με φυσικοχημικές παραμέτρους. Το θέμα όμως είναι πολύ σπουδαίο για την ανθρώπινη υγεία και ασφάλεια, οπότε ο Διεθνής Οργανισμός Υγείας (World Health Organization, WHO) έχει την ευθύνη να καθορίζει Διεθνείς Μονάδες (WHO International Units, IU) για τη βιολογική δράση τους.

Αξίζει να τονίσουμε ότι στο πλαίσιο του SI γίνεται χρήση της επίδρασης της σχετικότητας. Ένα παράδειγμα είναι ότι για πρότυπα συχνότητας, που βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις, είναι δυνατόν να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ τους με χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση, χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί η γενική θεωρία της σχετικότητας, διότι εκτός των άλλων, υπάρχει μια σχετική μετατόπιση συχνότητας για πρότυπα που είναι τοποθετημένα σε διαφορετικά ύψη μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης.

Ανεξάρτητα από το πώς ορίζονται οι διάφορες μονάδες, ακόμη και από την αρχαιότητα οι άνθρωποι προσπαθούσαν να στηρίζουν τις μετρήσεις τους σε κάτι που θεωρούσαν ως «πρότυπο», ως «σταθερό». Ακόμη και το πόδι του βασιλιά λαμβανόταν ως κάτι «σταθερό», αποδεκτό από πολλούς. Επίσης, η μέτρηση της απόστασης με την ώρα, «μίας ώρας δρόμος», υπονοούσε πως ένας άνθρωπος περπατούσε με δεδομένο, «σταθερό» ρυθμό, ταχύτητα. Μπορεί να αναφερθεί κάποιος σε πλήθος τέτοιων μονάδων. Με το σημερινό SI αυτή η ιδέα φτάνει σε υψηλό επίπεδο εφαρμογής, ίσως το πιο τέλειο με τα σημερινά επιστημονικά δεδομένα για τις διάφορες σταθερές.

1.3.1 Ορισμοί των θεμελιωδών μονάδων

Η επιλογή των σταθερών ορισμού είναι κάπως αυθαίρετη, αλλά πρέπει αυτή η επιλογή να μην οδηγεί σε αντιφάσεις. Με άλλα λόγια, οι σταθερές θα πρέπει να μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα με τις θεμελιώδεις μονάδες του SI, αλλά πρέπει να μπορεί να γίνει και το αντίστροφο, δηλαδή οι θεμελιώδεις μονάδες του SI να μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα με τις σταθερές. Οι σταθερές πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπως είναι και οι μονάδες του SI. Ο έλεγχος μπορεί να γίνει με χρήση των μονάδων των ανωτέρω σταθερών στο SI και της αρχής της ομογένειας. Ο άλλος, μαθηματικά κομψός τρόπος που θα ακολουθήσουμε εδώ, είναι η χρήση Γραμμικής Άλγεβρας. Είναι γνωστό ότι η τιμή μιας φυσικής ποσότητας γράφεται σε ένα σύστημα μονάδων ως:

$$q = \{q\}_{[q]}[q]$$

Στο SI οι σύμφωνες παράγωγες μονάδες έχουν τη μορφή:

$$[q] = \mathrm{s}^{p_1}\ \mathrm{m}^{p_2}\ \mathrm{kg}^{p_3}\ \mathrm{A}^{p_4}\ \mathrm{K}^{p_5}\ \mathrm{mol}^{p_6}\ \mathrm{cd}^{p_7}\ .$$

Οι μονάδες ακολουθούν τους κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, όπως και οι τιμές των φυσικών μεγεθών και οι αριθμητικές τιμές τους. Γίνεται χρήση γραμμικής άλγεβρας φτιάχνοντας ένα πολυδιάστατο διάνυσμα που έχει συνιστώσες τους παραπάνω εκθέτες για τη μονάδα του q, συγκεκριμένα το διάνυσμα

$$\upsilon_q = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix}$$

Κάθε φυσικό μέγεθος χαρακτηρίζεται από ένα τέτοιο διάνυσμα. Για παράδειγμα, η μονάδα της ταχύτητας του φωτός, $[c] = \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{1}$, έχει το εξής διάνυσμα:

$$\upsilon_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές πως η μονάδα του γινομένου δύο ποσοτήτων q, r, δηλαδή το $[qr] = [q][r]$ έχει ως διάνυσμα το άθροισμα των διανυσμάτων των δύο μεγεθών, $\upsilon_{qr} = \upsilon_q + \upsilon_r$. Για ποσότητα q υψωμένη σε δύναμη a, έχουμε $[q^a] = [q]^a$, οπότε προκύπτει ότι η μονάδα $[q^a]$ έχει διάνυσμα το $a\upsilon_q$, $\upsilon_{q^a} = a\upsilon_q$. Οι σχέσεις με την άθροιση και την ύψωση σε δύναμη υποδεικνύουν ότι οι εκθέτες που σχετίζονται με τις μονάδες αποτελούν διανυσματικό χώρο, όπου πολλαπλασιασμός μονάδων αντιστοιχεί σε πρόσθεση των σχετικών διανυσμάτων και ύψωση μονάδας σε μια δύναμη αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό του διανύσματος επί τη δύναμη. Ισχύει και η μεταθετικότητα. Τα διανύσματα των θεμελιωδών μονάδων αποτελούν μια βάση για αυτόν τον διανυσματικό χώρο. Στην περίπτωσή μας είναι τα:

$$\upsilon_{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{kg}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{mol}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \upsilon_{\mathrm{cd}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το πρόβλημα που τίθεται είναι αν μονάδες που στηρίζονται σε συγκεκριμένες φυσικές σταθερές αποτελούν ένα πλήρες σύστημα στον χώρο των διαστάσεων που εξετάζουμε. Στην περίπτωσή μας το ερώτημα είναι αν τα διανύσματα με τις μονάδες των σταθερών που επιλέγουμε αποτελούν μια βάση. Οι σταθερές του συστήματος SI, που εξηγούνται παρακάτω, είναι οι $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$(ή ν_{Cs})$, c, h, e, k, N_A, K_{\mathrm{cd}}$. Είναι εύκολο να βρει κάποιος τα διανύσματα των μονάδων αυτών των μεγεθών στο SI. Έχουμε:

$$\upsilon_{\nu_{\text{Cs}}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_c=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_h=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_e=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_k=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_{N_{\text{A}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\upsilon_{K_{\text{cd}}}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Αυτές οι σταθερές μπορεί να αποτελέσουν εναλλακτική βάση, επειδή είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η εξίσωση $a_1\upsilon_{\nu_{\text{Cs}}}+a_2\upsilon_c+a_3\upsilon_h+a_4\upsilon_e+a_5\upsilon_k+a_6\upsilon_{N_A}+a_7\upsilon_{K_{\text{cd}}}=0$ να ικανοποιείται μόνο αν όλοι οι συντελεστές a είναι μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με απλή αντικατάσταση από τις προηγούμενες σχέσεις. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι οι αρχικές θεμελιώδεις μονάδες μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των μονάδων του συνόλου (συστήματος) των ανωτέρω σταθερών, οπότε οι σταθερές αποτελούν ένα πλήρες σύνολο μονάδων, οι σταθερές είναι διαστατικά ανεξάρτητες.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ διαφορετικών βάσεων. Μπορεί κάποιος να γενικεύσει τη διαδικασία χωρίς αναφορά σε αρχικές θεμελιώδεις μονάδες, αλλά θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο με θεμελιώδεις μονάδες. Το πλήθος των σταθερών και των αρχικών μονάδων πρέπει να είναι το ίδιο. Θα περιοριστούμε σε επτά σταθερές και στις επτά θεμελιώδεις μονάδες του SI. Έχουμε την παρακάτω σχέση με μονάδες που σχετίζονται με τις σταθερές $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7$:

$$[q]=[c_1]^{s_1}[c_2]^{s_2}[c_3]^{s_3}[c_4]^{s_4}[c_5]^{s_5}[c_6]^{s_6}[c_7]^{s_7}$$

Το σχετικό διάνυσμα είναι:

$$w_q=\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\\s_5\\s_6\\s_7\end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τη σχέση μεταξύ των εκθετών της προηγούμενης εξίσωσης και της αντίστοιχης που γράψαμε προηγουμένως με τις θεμελιώδεις μονάδες του SI, της $[q]=\text{s}^{p_1}\ \text{m}^{p_2}\ \text{kg}^{p_3}\ \text{A}^{p_4}\ \text{K}^{p_5}\ \text{mol}^{p_6}\ \text{cd}^{p_7}$. Λαμβάνουμε υπόψη τις $\upsilon_{qr}=\upsilon_q+\upsilon_r$και $\upsilon_{q^a}=a\upsilon_q$και μετά από πράξεις καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$\upsilon_q=\sum_{j=1}^{7}s_j\upsilon_{c_j}=Mw_q$$

όπου $M_{ij}=\upsilon_{c_j}^i$ και $\upsilon_{c_j}^i$ είναι η i-στή συνιστώσα του διανύσματος υ_{c_j}.

Για την περίπτωση των συγκεκριμένων σταθερών του SI έχουμε:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix}$$

Μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι η σχέση αυτή δίνει τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, αν θέσουμε $s_2 = 1, s_1 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 0$, που ισχύει για τη σταθερά c, βρίσκουμε $p_1 = -1, p_2 = 1, p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0$, δηλαδή το αναμενόμενο:

$$[c] = \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}$$

Αν θέσουμε $s_3 = 1, s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 0$ που ισχύει για την h, βρίσκουμε $p_1 = -1, p_2 = 2, p_3 = 1, p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0$ και πάλι τη σωστή έκφραση:

$$[h] = \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{kg}$$

Η ορίζουσα της μήτρας μετασχηματισμού είναι μη μηδενική, οι σταθερές είναι ανεξάρτητες, πράγματι η ορίζουσά της είναι -1 και η αντιστροφή της υπάρχει και ισχύει η αντίστροφη σχέση:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix}$$

Με χρήση της βρίσκουμε πώς συνδέονται οι θεμελιώδεις μονάδες του SI με τις μονάδες που αντιστοιχούν στις επτά θεμελιώδεις σταθερές του SI. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $p_3 = 1, p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0$, αυτό ισχύει για το kg και βρίσκουμε από την τελευταία σχέση με τη μήτρα, $s_1 = 1, s_2 = -2, s_3 = 1, s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 0$. Τελικώς:

$$1\ \mathrm{kg} = [\nu_{\mathrm{Cs}}][c]^{-2}[h].$$

Με βάση αυτά, είναι σαφές ότι μπορούμε πράγματι να δώσουμε τους ορισμούς των θεμελιωδών μονάδων (base units) του SI ως προς τις ανωτέρω σταθερές ορισμού.

Όπως είπαμε, αυτό δεν ισχύει για κάθε σύνολο σταθερών. Αναφερθήκαμε στην επιλογή των σταθερών $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}, c, \frac{\lambda_e}{2\pi}, \mu_0, k, N_A, K_{\mathrm{cd}}$, όπου $\frac{\lambda_e}{2\pi}$ είναι το ανηγμένο μήκος κύματος Compton. Πράγματι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$\upsilon_{\nu_{\mathrm{Cs}}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_c=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_\lambda=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_\mu=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_k=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\upsilon_{N_{\mathrm{A}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\upsilon_{K_{\mathrm{cd}}}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Η μήτρα που προκύπτει από αυτά τα διανύσματα έχει ορίζουσα μηδέν, οπότε αυτές οι σταθερές δεν είναι ανεξάρτητες, δεν αποτελούν πλήρες σύνολο και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως θεμελιώδεις σταθερές.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τα μεγέθη που χαρακτηρίζονται από τις ανεξάρτητες σταθερές ως θεμελιώδη, να ορίσουμε τις μονάδες τους και να καταλήξουμε σε ένα τελείως διαφορετικό σύστημα μονάδων σε σχέση με τα γνωστά μας συστήματα. Συγκεκριμένα, οι επτά σταθερές αναφέρονται σε φυσικά μεγέθη -συχνότητα, ταχύτητα, δράση κτλ. Αυτά θα ήταν τα θεμελιώδη μεγέθη. Οι μονάδες τους θα ήταν κάποια πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια (όχι κατ' ανάγκη δεκαδικά) των ανωτέρω σταθερών. Θα είχαμε, για παράδειγμα, ότι μονάδα της δράσης είναι 1 «δράσιο» που είναι το 1/34 της δράσης που αντιπροσωπεύει η σταθερά h , $(1/34)h$. Ο συντηρητισμός μας δεν επέτρεψε κάτι τέτοιο, αλλά αυτό που ακολουθεί, όπου γίνεται χρήση των καθιερωμένων μονάδων του SI. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές των σταθερών ως προς τις θεμελιώδεις μονάδες του SI είναι δεδομένες, χωρίς αβεβαιότητα και έτσι προσδιορίζονται οι θεμελιώδεις μονάδες του SI, ως προς τις σταθερές. Μερικά παραδείγματα, το δευτερόλεπτο αντιστοιχεί σε $p_1=1$, ενώ όλα τα άλλα p είναι μηδέν, οπότε $s_1=-1$ και τα υπόλοιπα s είναι μηδέν. Έτσι βρίσκουμε:

$$1\ \mathrm{s}=\left[\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right]^{-1}=\frac{\left\{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right\}_{\mathrm{SI}}}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}.$$

Το μέτρο αντιστοιχεί σε $p_2=1$, ενώ όλα τα άλλα p είναι μηδέν. Αυτό οδηγεί σε $s_1=-1,\ s_2=1$, ενώ τα υπόλοιπα s είναι μηδέν, οπότε

$$1\ \mathrm{m}=\left[\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right]^{-1}\left[c\right]=\frac{\left\{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right\}_{\mathrm{SI}}}{\left\{c\right\}_{\mathrm{SI}}}\frac{c}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}\ .$$

Το επόμενο παράδειγμα είναι το χιλιόγραμμο που το είδαμε παραπάνω. Έχουμε:

$$1\ \mathrm{kg}=\left[\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right]\left[c\right]^{-2}\left[h\right]=\frac{\left\{c\right\}_{\mathrm{SI}}^{2}}{\left\{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}\right\}_{\mathrm{SI}}\left\{h\right\}_{\mathrm{SI}}}\frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}h}{c^2}\ .$$

Η διαδικασία είναι ίδια και για τις υπόλοιπες μονάδες, οπότε καταλήγουμε στους παρακάτω ορισμούς:

Το δευτερόλεπτο

Το δευτερόλεπτο, σύμβολο s**, είναι η μονάδα χρόνου στο SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της συχνότητας, $\Delta\nu_{Cs}$, της μη διαταραγμένης μετάπτωσης μεταξύ των δύο υπέρλεπτων σταθμών της θεμελιώδους κατάστασης του καισίου 133, ίση με** 9 192 631 770 **ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα** Hz**, η οποία ισούται με** s^{-1}**.**

Μη διαταραγμένη μετάπτωση σημαίνει ότι το καίσιο είναι σε κατάσταση ατμών και το άτομό του δεν διαταράσσεται από εξωτερικά πεδία. Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$\Delta \nu_{\mathrm{Cs}} = 9\ 192\ \ 631\ 770\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Η αντιστροφή αυτής της σχέσης δίνει μια σχέση του δευτερολέπτου ως προς τη σταθερά ορισμού $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1\ \mathrm{s}\ = \frac{9\ 139\ 631\ 770}{\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}}.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το δευτερόλεπτο ισούται με τη διάρκεια $9\ 192\ \ 631\ 770$ περιόδων της ανωτέρω ακτινοβολίας.

Το μέτρο

Το μέτρο, σύμβολο m, είναι η μονάδα μήκους του SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό, c (σταθερά ορισμού), ίση με 299 792 458 ακριβώς, όταν εκφράζεται σε ms^{-1}. Το δευτερόλεπτο ορίζεται σύμφωνα με τα προηγούμενα από τη σταθερά ορισμού $\Delta\nu_{Cs}$.

Αυτός ο ορισμός του μέτρου υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Η αντιστροφή αυτής της σχέσης δίνει, τελικώς, μετά από κάποιες πράξεις, μια έκφραση για το μέτρο ως προς τις σταθερές ορισμού c και $\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{m} = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{299\ 792\ 458}\frac{c}{\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}} \approx 30,663\ 319\ \frac{c}{\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}}.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το μέτρο είναι το μήκος που διανύει το φως στο κενό κατά το χρονικό διάστημα $1/\ 299\ 792\ 458$ του δευτερολέπτου.

Το χιλιόγραμμο

Το χιλιόγραμμο, σύμβολο kg, είναι η μονάδα μάζας του SI. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή της σταθεράς του Planck h ίση με $6{,}626\ 070\ 15\times 10^{-34}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται σε Js που ισούται με $\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$, όπου το δευτερόλεπτο και το μέτρο έχουν οριστεί σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$h = 6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}}.$$

Η αντιστροφή της δίνει, τελικώς, μετά από κάποιες πράξεις, μια ακριβή έκφραση για το χιλιόγραμμο ως προς τις σταθερές ορισμού h, $\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}$ και c:

$$1\ \mathrm{kg} = \frac{(299\ 792\ 458)^2}{(6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)}\ \frac{h\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}}{c^2} \approx 1,475\ 5214 \times 10^{40}\ \frac{h\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}}{c^2}.$$

Το αμπέρ

Το αμπέρ, σύμβολο A, είναι η μονάδα ηλεκτρικού ρεύματος του SI. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή του στοιχειώδους φορτίου ίση με $1{,}602\ 176\ 634\times 10^{-19}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα C, η οποία μονάδα ισούται με A s, όπου το δευτερόλεπτο s, έχει οριστεί σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$e = 1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19}\mathrm{A\ s}.$$

Η αντιστροφή της δίνει, τελικώς μετά από πράξεις, μια ακριβή έκφραση για το αμπέρ ως προς τις σταθερές ορισμού e και $\Delta \nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{A} = \frac{1}{(9\ 192\ \ 631\ 770)(1,602\ 176\ 634\times 10^{-19})}\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}} e \approx 6,789\ 687\times 10^{8}\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} e\,.$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι το ένα αμπέρ είναι το ηλεκτρικό ρεύμα που αντιστοιχεί στη ροή $1/(1,602\ 176\ 634\times 10^{-19})$ στοιχειωδών φορτίων ανά δευτερόλεπτο.

Το κέλβιν

Το κέλβιν, σύμβολο K, είναι η μονάδα της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του SI. Ορίζεται λαμβάνοντας την αριθμητική τιμή της σταθεράς Boltzmann k (σταθερά ορισμού) ίση με $1{,}380\ 649\times 10^{-23}$ ακριβώς, όταν εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{JK^{-1}}$, η οποία ισούται με $\mathrm{kg\,m^2 s^{-2} K^{-1}}$, όπου το χιλιόγραμμο, το μέτρο και το δευτερόλεπτο ορίστηκαν σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη σταθερά ορισμού:

$$k = 1,380\ 649\times 10^{-23}\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-2} K^{-1}}.$$

Η αντιστροφή της δίνει μια ακριβή σχέση του κέλβιν ως προς τις σταθερές ορισμού k, h και $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1\ \mathrm{K}= \frac{1,380\ 649\times 10^{-23}}{(6,626\ 070\ 15\times 10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)}\ \frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} h}{k} \approx 2,266\ 6653\ \frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} h}{k}\,.$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι ένα κέλβιν ισούται με τη μεταβολή της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας, η οποία προκύπτει από μεταβολή της θερμικής ενέργειας kT κατά $1{,}380\ 649\times 10^{-23}\mathrm{J}$.

Το μολ ή γραμμομόριο

Το γραμμομόριο, σύμβολο mol, είναι η μονάδα ποσού ουσίας στο SI. Ένα γραμμομόριο περιέχει $6{,}022\ 140\ 76\times 10^{23}$ στοιχειώδεις οντότητες ακριβώς. Αυτός ο αριθμός είναι η αριθμητική τιμή της σταθεράς (σταθερά ορισμού) Avogadro, N_A, όταν η σταθερά εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{mol^{-1}}$ η αριθμητική τιμή της λέγεται αριθμός Avogadro. Το ποσό ουσίας, σύμβολο n, ενός συστήματος είναι ένα μέτρο του αριθμού συγκεκριμένων στοιχειωδών οντοτήτων. Μια στοιχειώδης οντότητα μπορεί να είναι άτομο, μόριο, ιόν, ηλεκτρόνιο, κάθε άλλο σωματίδιο ή συγκεκριμένη ομάδα σωματιδίων.

Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει για τη σταθερά ορισμού την ακριβή σχέση:

$$N_{\mathrm{A}} = 6,022\ 140\ 76\times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}.$$

Η αντιστροφή της δίνει μια ακριβής έκφραση για το γραμμομόριο ως προς τη σταθερά ορισμού, N_{A}

$$1\ \mathrm{mol} = 6,022\ 140\ 76\times 10^{23}\ \frac{1}{N_{\mathrm{A}}}\ .$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι το γραμμομόριο είναι το ποσό ουσίας ενός συστήματος που περιέχει ακριβώς $6,022\ 140\ 76\times 10^{23}$ συγκεκριμένες στοιχειώδεις οντότητες. Στο όνομα «ποσό ουσίας», η λέξη «ουσία» θα αντικαθίσταται με λέξεις που προσδιορίζουν τη συγκεκριμένη ουσία στην οποία αναφερόμαστε. Για παράδειγμα, «ποσό υδροχλωρίου, HCl» ή «ποσό ηλεκτρονίων» κτλ. Πολλές φορές, αντί του πλήρους «ποσό ουσίας», μπορεί να χρησιμοποιείται ο όρος «ποσό», π.χ. «ποσό υδροχλωρίου, HCl».

Η καντήλα

Η καντήλα, σύμβολο cd είναι η μονάδα φωτοβολίας ή φωτεινής έντασης, σε δεδομένη κατεύθυνση. Ορίζεται παίρνοντας την αριθμητική τιμή της φωτεινής απόδοσης μονοχρωματικής ακτινοβολίας συχνότητας 540×10^{12} Hz ακριβώς, η οποία συμβολίζεται με K_{cd}, να είναι 683 όταν εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{lm\ W^{-1}}$, η οποία ισούται με $\mathrm{cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^{3}}$. Το χιλιόγραμμο, το μέτρο και το δευτερόλεπτο

ορίζονται ως προς τα h, c και $\Delta\nu_{Cs}$**, σύμφωνα με τα προηγούμενα. Σημειώνουμε ότι** $\mathrm{lm} = \mathrm{cd\ sr}$**, είναι η φωτεινή ροή που εκπέμπει φωτεινή πηγή φωτοβολίας** 1 cd **μέσα σε στερεά γωνία** 1 sr**.**
Αυτός ο ορισμός υποδηλώνει την παρακάτω ακριβή σχέση για τη φωτεινή απόδοση, σταθερά ορισμού:

$$K_{\mathrm{cd}} = 683\ \mathrm{cd\ sr\ kg^{-1}m^{-2}s^{3}}$$

για μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $\nu = 540\times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$. Αντιστρέφοντας την προτελευταία σχέση παίρνουμε, τελικώς, μια ακριβή έκφραση για την καντήλα ως προς τις σταθερές ορισμού K_{cd}, h και $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$

$$1\ \mathrm{cd} = \frac{1}{(6{,}626\ 070\ 15\times 10^{-34})(9\ 192\ \ 631\ 770)^2\, 683}\ (\Delta\nu_{\mathrm{Cs}})^2\, h\, K_{\mathrm{cd}}$$

$$\approx 2{,}614\ 830\times 10^{10}\ (\Delta\nu_{\mathrm{Cs}})^2\, h\, K_{\mathrm{cd}}\ .$$

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι μία καντήλα είναι η φωτοβολία, σε ορισμένη κατεύθυνση, μιας πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $540\times 10^{12}\ \mathrm{Hz}$ και έχει ένταση ακτινοβολίας σε αυτήν την κατεύθυνση $\left(\frac{1}{683}\right)\mathrm{W\ sr^{-1}}$.

Είναι εύκολο να εκφραστούν και οι παράγωγες μονάδες ως συνάρτηση των σταθερών ορισμού. Ας πάρουμε ως παράδειγμα τη μονάδα της ενέργειας το τζουλ, $\mathrm{joule}\ (\mathrm{J})$. Ισχύει,

$$1\ \mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^2\ \ s^{-2}} = (299\ 792\ 458)(6{,}626\ 070\ 154\times 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)\ \frac{h}{c\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

$$\approx 1{,}826\ 066\ 53\times 10^{-15}\ \ \frac{h}{c\ \Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}\ .$$

Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος πραγματοποίησης των μονάδων. Βέβαια υπάρχουν στη βιβλιογραφία έντυπα που περιγράφουν συγκεκριμένους τρόπους. Το θέμα αφήνεται ανοικτό, ώστε όσο η τεχνολογία εξελίσσεται, θα εξελίσσονται και οι τρόποι πραγματοποίησης, ενώ οι ορισμοί θα παραμένουν οι ίδιοι. Θα αναφερθούμε παρακάτω μόνο στην περίπτωση του χιλιόγραμμου που είναι η μονάδα μάζας.

Κάνουμε εδώ μια παρένθεση που σχετίζεται με ονοματολογία. Επειδή ο όρος «ένταση» στη Φυσική χρησιμοποιείται για να δηλώσει συγκεκριμένα φυσικά μεγέθη, τα οποία σχετίζονται με κάποιο υπόθεμα, όπως π.χ. η ένταση ηλεκτρικού πεδίου, η οποία είναι δύναμη ανά υπόθεμα, που εδώ είναι φορτίο, ($E = F\,/\,q$), δεν συνιστάται η ορολογία «ένταση (ηλεκτρικού) ρεύματος *I*» αλλά να γίνεται χρήση του όρου (ηλεκτρικό) ρεύμα I.

Στον Πίνακα 1.5 φαίνονται οι θεμελιώδεις μονάδες του SI. Δίνονται το είδος του μεγέθους το οποίο εκφράζει η κάθε μονάδα, το αγγλικό και το ελληνικό όνομά της και το (διεθνές) υποχρεωτικό σύμβολό της.

Πίνακας 1.5 *Τα θεμελιώδη μεγέθη και οι θεμελιώδεις μονάδες του SI.*

Θεμελιώδες μέγεθος		**Θεμελιώδης μονάδα**	
Όνομα	Συνιστώμενο (ενδεικτικό) Σύμβολο	Όνομα	Υποχρεωτικό Σύμβολο
χρόνος (time)	*t*	δευτερόλεπτο	s (second)
μήκος (length)	*L, x, r κλπ*	μέτρο (meter)	m
μάζα (mass)	*m*	χιλιόγραμμο	kg (kilogram)
ηλεκτρικό ρεύμα (electric current)	*I, i*	αμπέρ (ampere)	A
θερμοδυναμική θερμοκρασία	*T*	κέλβιν (kelvin)	K

(thermodynamic temperature)			
ποσό ουσίας (amount of substance)	n	μολ (mole)	mol
φωτοβολία ή φωτεινή ροή (luminous intensity)	I_V	καντήλα (candela)	cd

Επιλέγεται αυτή η διάταξη των θεμελιωδών μονάδων ώστε κάθε μονάδα να εξαρτάται από προηγούμενες μονάδες, αλλά όχι από επόμενες. Αυτή η διάταξη μπορεί να τηρείται στη γραφή της διάστασης φυσικού μεγέθους, αλλά δεν είναι αυστηρός κανόνας, οπότε δεν ακολουθείται πάντοτε.

1.3.2 Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια μονάδων

Οι μονάδες πολλές φορές είναι πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες για χρήση σε διάφορες περιπτώσεις. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων του SI, όπου οι πολλαπλασιαστές (παράγοντες πολλαπλασιασμού) είναι δυνάμεις του 10, όπως δείχνει ο Πίνακας 1.6. Οι πολλαπλασιαστές ονομάζονται *προθέματα*. Οι μονάδες που είναι δεκαδικά πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των θεμελιωδών μονάδων του SI (ανάλογα ισχύουν και για τα άλλα σύμφωνα συστήματα μονάδων), είναι μέρος των μονάδων του SI. Για παράδειγμα, το $1\text{km} = 1 \times 10^3$ m είναι μονάδα του SI. Υπάρχουν και πολλαπλασιαστές που δεν είναι δεκαδικοί. Οι μονάδες που προκύπτουν χρησιμοποιούνται από παράδοση (για ιστορικούς λόγους), αλλά είναι εκτός SI, π.χ. το πρώτο λεπτό (1 min) ισούται με 60 δευτερόλεπτα, (1 min = 60 s), η ώρα, $1\text{ h} = 3600\text{ s}$. Στον Πίνακα 1.6 δίνονται το όνομα του προθέματος στα αγγλικά, μια απόδοση στα ελληνικά και το (διεθνές) σύμβολό του. Σημειώστε ότι τα σύμβολα είναι με κεφαλαία γράμματα μέχρι και το πρόθεμα mega (M), τα υπόλοιπα δηλώνονται με πεζά γράμματα. Τα ονόματα των προθεμάτων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες, όμως το σύμβολο είναι διεθνώς υποχρεωτικά το ίδιο (και με όρθια γράμματα). Τα ονόματα των προθεμάτων προέρχονται από ελληνικές, λατινικές και άλλες γλώσσες. Προσέξτε ότι οι δυνάμεις του 10, που είναι τα προθέματα, διαφέρουν η μια από την άλλη κατά 3, με εξαίρεση κάποιες στη μέση του καταλόγου. Δηλαδή τα πλείστα προθέματα είναι της μορφής 10^{3k}, όπου k ακέραιος. Τα ονόματά τους για τις διάφορες τιμές του k σχετίζονται με τη λέξη που χαρακτηρίζει το k σε κάποια γλώσσα. Για παράδειγμα, το peta (P) προέρχεται από το ελληνικό πέντε και σημαίνει πολλαπλασιαστή με $k = 5$, ο παράγοντας είναι $10^{3\times 5} = 10^{15}$. Τα προθέματα γράφονται πριν από τις μονάδες χωρίς κενό μεταξύ τους. Δεν χρησιμοποιούνται δύο προθέματα μαζί το ένα μετά το άλλο.

Πίνακας 1.6 *Τα προθέματα του SI.*

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	**Όνομα**	**Σύμβολο**
10^{30}	quetta-κβετα	Q
10^{27}	ronna-ροννα	R
10^{24}	yotta-γυοτα	Y
10^{21}	zetta-ζητα	Z
10^{18}	exa-εξα	E
10^{15}	peta-πετα	P
10^{12}	tera-τερα	T
10^{9}	giga-γιγα	G
10^{6}	mega-μεγα	M
10^{3}	kilo-χιλιο	k
10^{2}	hecto-εκατο	h
10^{1}	deca ή deka-δεκα	da

10^{-1}	deci-δεκατο, ντεσι	d
10^{-2}	centi-εκατοστο, σεντι	c
10^{-3}	milli-χιλιοστο, μιλι	m
10^{-6}	micro-μικρο	μ
10^{-9}	nano-νανο	n
10^{-12}	pico-πικο	p
10^{-15}	fempto-φεμπτο	f
10^{-18}	atto-ατο	a
10^{-21}	zepto-ζεπτο	z
10^{-24}	yocto-γυοκτο	y
10^{-27}	ronto-ροντο	r
10^{-30}	quecto-κβετο	q

Καλό είναι να αναφερθεί ότι στις αγγλόφωνες χώρες, γενικώς σήμερα, το δισεκατομμύριο (billion) θεωρείται ότι είναι το 10^9 και το τρισεκατομμύριο (trillion) 10^{12}. Παρ' όλα αυτά, σε μερικά κείμενα κάποιοι μπορεί να θεωρούν ότι το billion σημαίνει 10^{12} και το trillion 10^{18}. Χρειάζεται προσοχή. Σημειώνουμε ότι γράφουμε $\mathrm{km}, \mathrm{km}^2, \mathrm{km}^3$ αλλά όχι Mm^3. Τα προθέματα χρησιμοποιούνται με τις μονάδες του SI (δεν χρησιμοποιούνται με τη μονάδα του χρόνου στο SI). Όμως τα προθέματα χρησιμοποιούνται σε πολλές περιπτώσεις και εκτός SI. Παραδείγματα είναι: Mpc (μεγα-παρσέκ), με τους κωδικούς νομισμάτων όπως kEUR, kGBP, MUSD, GSEK.

Για πληρότητα αναφέρουμε ότι η Διεθνής Ηλεκτροχημική Επιτροπή (International Electrochemical Commission, IEC) έχει εγκρίνει τον Πίνακα 1.7 για προθέματα που είναι πολλαπλασιαστές στο δυαδικό σύστημα. Δίνεται μόνο το αγγλικό όνομα. Αυτά τα προθέματα είναι για χρήση στις επιστημονικές περιοχές επεξεργασίας δεδομένων και μετάδοσης δεδομένων. Αυτά δεν ανήκουν στο SI, αλλά όπως φαίνεται παρακάτω, έχει γίνει δανεισμός χαρακτηριστικών από τα προθέματα του SI. Στην περιοχή αυτής της τεχνολογίας χρησιμοποιούνται και τα προθέματα του SI τα οποία έχουν τη συνήθη τους σημασία.

Πίνακας 1.7 *Προθέματα του δυαδικού.*

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	**Αγγλικό όνομα**	**Σύμβολο**	**Προέλευση**	**Παραγωγή**
2^{10}	kibi	Ki	kilobinary:$(2^{10})^1$	kilo:$(10^3)^1$
2^{20}	mebi	Mi	megabinary:$(2^{10})^2$	mega: $(10^3)^2$
2^{30}	gibi	Gi	gigabinary:$(2^{10})^3$	giga:$(10^3)^3$
2^{40}	tebi	Ti	terabinary:$(2^{10})^4$	tera:$(10^3)^4$
2^{50}	pebi	Pi	petabinary:$(2^{10})^5$	peta:$(10^3)^5$
2^{60}	exbi	Ei	exabinary:$(2^{10})^6$	exa:$(10^3)^6$

Στα αγγλικά η πρώτη συλλαβή προφέρεται όπως και στην περίπτωση του SI και η δεύτερη ως bee. Ανάλογα μπορεί κάποιος να προτείνει και για την ελληνική γλώσσα όπου η δεύτερη συλλαβή μπορεί να προφέρεται μπι. Σημειώνουμε ότι κάποτε οι ειδικοί των υπολογιστών, επειδή είδαν ότι το 2^{10} ήταν περίπου ίσο με το 1000, χρησιμοποιούσαν το πρόθεμα kilo να σημαίνει 1024. Σήμερα υπάρχει ακόμη αυτή η σύγχυση που μπορεί να λυθεί με τη χρήση των δυαδικών προθεμάτων. Στον Πίνακα 1.8 φαίνονται μερικές συγκρίσεις των προθεμάτων του δυαδικού με τα προθέματα του SI που είναι δεκαδικά προθέματα.

Πίνακας 1.8 *Παραδείγματα και συγκρίσεις προθεμάτων δυαδικού και SI.*

1 kibibit	1 Kibit = 2^{10} bit = 1024 bit
1 kilobit	1 kbit = 10^{3} bit = 1000 bit
1 mebibyte	1 MiB = 2^{20} B = 1 048 576 B
1 megabyte	1 MB = 10^{6} B = 1 000 000 B
1 gibibyte	1 GiB = 2^{30} B = 1 073 741 824 B
1 gigabyte	1 GB = 10^{9} B = 1 000 000 000 B

1.3.3 Μονάδες εκτός SI

Στον Πίνακα 1.9 φαίνονται οι μονάδες που δεν ανήκουν στο SI, αλλά έχει γίνει αποδεκτό να χρησιμοποιούνται με το SI. Δίνεται το ελληνικό και το αγγλικό τους όνομα.

Πίνακας 1.9 *Μονάδες εκτός SI που είναι αποδεκτές για χρήση μαζί με τις μονάδες του S.*

Μέγεθος	Όνομα μονάδας	Σύμβολο	Τιμή σε μονάδες του SI
χρόνος	minute λεπτό hour ώρα day ημέρα	min h d	1 min = 60 s 1 h = 60 min = 3600 s 1 d = 24 h = 86 400 s
επίπεδη γωνία	degree βαθμός minute πρώτο λεπτό second δεύτερο λεπτό	º ′ ′′	$1^{o} = (\pi/180)$ rad $1' = (1/60)^{o} = (\pi/10\,800)$ rad $1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad
επιφάνεια	hectare εκτάριο	ha	$1\,\text{ha} = 1\,\text{hm}^2 = 10^4\,\text{m}^2$
όγκος	litre λίτρο	L, l	$1\,\text{L} = 1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = 10^3\,\text{cm}^3 = 10^{-3}\,\text{m}^3$
μάζα	tonne τόνος	t	10^3 kg
μήκος	astronomical unit αστρονομική μονάδα	au	1au = 149 597 870 700 m

Πολλές φορές δίνουμε την τιμή ενός ειδικού μεγέθους μαζί με την αβεβαιότητά του. Για παράδειγμα, για τη μάζα του πρωτονίου γράφουμε: $m_p = 1{,}672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27}$ kg. Τα δύο ψηφία στην παρένθεση δείχνουν την αβεβαιότητα στα δύο τελευταία ψηφία της αριθμητικής τιμής. Για παράδειγμα, η αβεβαιότητα στο παράδειγμά μας είναι ίση με $0{,}000\,000\,000\,51 \times 10^{-19}$ kg.

Υπάρχουν κάποιες μονάδες εκτός SI που από συνήθεια χρησιμοποιούνται σε κλάδους όπως είναι η Μετεωρολογία, η Ναυσιπλοΐα κτλ. και γι' αυτό παραθέτουμε τον Πίνακα 1.10. Δίνουμε την τιμή τους σε μονάδες του SI και το αγγλικό και το ελληνικό όνομα.

Πίνακας 1.10 *Άλλες μονάδες εκτός SI σε ευρεία χρήση.*

Μέγεθος	Όνομα	Σύμβολο	Τιμή στο SI
πίεση	bar-μπαρ millimeter of mercury - χιλιοστό υδραγύρου	Bar mmHg	1 bar = 0,1 MPa = 100 kPa = 10^5 Pa 1 mmHg = 133,322 Pa
μήκος	angstrom-άνγκστρομ	Å	1 Å = 0,1 nm = 100 pm = 10^{-10} m
απόσταση	nautical mile - ναυτικό μίλι	M	1 M = 1852 m
επιφάνεια	barn-μπαρν	b	$1\,\text{b} = 100\,\text{fm}^2 = (10^{-12}\,\text{cm})^2 = 10^{-28}\,\text{m}^2$
ταχύτητα	knot-κόμβος	kn	$1\,\text{kn} = \left(\frac{1852}{3600}\right)\text{m/s}$

λογάριθμοι λόγων	neper - νέπερ	Np	
>>	bel, decibel - μπελ, ντεσιμπέλ	B, dB	

Η μονάδα bar για την πίεση θεωρείται σήμερα ως η κανονική πίεση (standard pressure) για τη θερμοδυναμική. Για το ναυτικό μίλι δεν υπάρχει μοναδικό σύμβολο, συνηθίζονται τα σύμβολα M, NM, Nm και nmi.

Στη συνέχεια κάνουμε μερικές διευκρινίσεις σχετικές με τα μεγέθη που είναι λογάριθμοι λόγων. Η διατύπωση $L_A = n\,\mathrm{Np}$, όπου n είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δύο τιμές A_2, A_1 του μεγέθους A, ισχύει $n = \ln(A_2/A_1)$. Αν $L_A = 1\,\mathrm{Np}$, τότε $A_2/A_1 = e$. Η διατύπωση $L_X = m\,\mathrm{dB} = (m/10)\,\mathrm{B}$, όπου m είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δύο τιμές X, X_0 του σχετικού μεγέθους, ισχύει $\lg(X/X_0) = m/10$. Αν $L_X = 1\,\mathrm{B}$, τότε $X/X_0 = 10$. Αν $L_X = 1\,\mathrm{dB}$, τότε $X/X_0 = 10^{1/10}$.

Υπάρχουν μονάδες που χρησιμοποιούνται σε διάφορα συγγράμματα, οι οποίες ανήκουν στα συστήματα τύπου CGS. Θα αναφερθούμε σε εκτεταμένη παράγραφο σε αυτό το θέμα, κυρίως σχετικά με τις μονάδες του ηλεκτρομαγνητισμού. Επίσης, θα αναφερθούμε στα περί Φυσικών Μονάδων ή Φυσικών Συστημάτων μονάδων

Στον Πίνακα 1.11 δίνουμε επιπλέον μονάδες εκτός SI που συναντούμε στη βιβλιογραφία, δίνουμε τα ελληνικά τους ονόματα.

Πίνακας 1.11 *Μερικές άλλες μονάδες εκτός SI.*

Μέγεθος	**Όνομα και σύμβολο**	**Τιμή στο SI**
δύναμη	χιλιοστόγραμμο δύναμης kgf κιλοποντ kp	1 kgf = 9,806 65 N (ακριβώς)
πίεση	Κανονική ατμόσφαιρα atm Torr-Τορ τεχνητή ατμόσφαιρα at	1 atm = 101 325 Pa (ακριβώς) 1 Torr = (1/760) atm (ακριβώς) ≈ 133,322 Pa 1 at = 1 kgf/cm^2 = 98 066,5 Pa (ακριβώς) = 0,967 841 atm
ισχύς	μετρικός ίππος CV, PS ίππος (ιπποδύναμη) hp	1 CV = 75 kgfm/s (ακριβώς) = 735,498 75 W (ακριβώς) 1 hp = 745,699 9 W (ακριβώς)
πυκνότητα μαγνητικής ροής	γκάους Gs στη Φυσική G	1 G = 10^{-4} T

Στον Πίνακα 1.12 δίνουμε μετατροπές μεταξύ διάφορων μονάδων, παρόλο που δεν συνιστάται η χρήση πολλών από αυτές, τουλάχιστον σε επιστημονικά κείμενα. Αυτές, όμως, θα εξακολουθήσουν να χρησιμοποιούνται για πολύ ακόμη στην καθημερινή ζωή σε μερικές χώρες.

Πίνακας 1.12 *Μετατροπές διάφορων μονάδων.*

1 in (ίντσα) $= 2,54$ cm (ακριβώς)
1 ft (πόδι) $= 12$ in (ακριβώς) $= 0,3048$ m (ακριβώς)
1 yd (γυάρδα, πήχυς) $= 3$ ft (ακριβώς) $= 0,9144$ m (ακριβώς)
1 mile (μίλι) $= 5280$ ft (ακριβώς) $= 1,609\ 344$ m (ακριβώς)
1 L (λίτρο) $= 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ (ακριβώς)
1 min (λεπτό) $= 60$ s
1 h (ώρα) $= 60$ min=3600 s
1 d (ημέρα) $= 24$ h $= 86\ 400$ s
1 a (annum, έτος) ή 1 $\mathrm{a}_{\mathrm{trop}}$ (τροπικό έτος) $\approx 365,242\ 20$ d $\approx 31\ 556\ 926$ s
1 g_{n} (κανονική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας) $= 9,806\ 65\ \mathrm{m/s}^2$ (ακριβώς)
1 lb (πάουντ, λίμπρα) $= 0,453\ 592\ 37$ kg (ακριβώς)
1 acre $= 4840\ \mathrm{yd}^2$ (ακριβώς) $= 4064,856\ \mathrm{m}^2$
1 barrel,USA (βαρέλι,ΗΠΑ) $= 9702\ \mathrm{in}^3 = 158,9873$ L
1 lbf (πάουντ δύναμης) $= 4,448\ 222$ N
1 Btu (βρετανική μονάδα θερμότητας) $= 788,169\ \mathrm{ft \cdot lbf} = 1055,056$ J

Το a για τη μονάδα έτος προέρχεται από το annum που θα πει έτος στα λατινικά. Στα αγγλικά για το έτος χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα 1 y και 1 yr.

Αναφέρουμε εδώ ότι υπάρχουν σε χρήση οι λεγόμενοι χαρακτηριστικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι αδιάστατοι συνδυασμοί φυσικών μεγεθών. Αναφέρουμε δύο από αυτούς:

Α) Ο αριθμός Reynolds, ο οποίος έχει ως σύμβολο το Re, ορίζεται από τη σχέση $Re = \frac{\rho \upsilon l}{\eta} = \frac{\upsilon l}{\nu}, \nu = \frac{\eta}{\rho} =$κινηματικό ιξώδες. Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται στη μελέτη της ροής ρευστών. Το υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, l είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος και η είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους (συντελεστής εσωτερικής τριβής).

Β) Ο αριθμός Mach (Μαχ), ο οποίος έχει ως σύμβολο το Ma, ορίζεται από τη σχέση $Ma = \frac{\upsilon}{c}$, υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα κάποιου αντικειμένου, π.χ. η ταχύτητα πυραύλου ή αεροπλάνου, και c είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσον στο οποίο γίνεται η κίνηση του αντικειμένου. Τονίζομε ότι Mach δεν είναι μονάδα, γι' αυτό πρέπει να μπαίνει πριν τον αριθμό. Δηλαδή λέμε το υπερηχητικό αεροπλάνο κινείται με Mach = 3. Αυτό σημαίνει ότι κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 3\ c$, δηλαδή με ταχύτητα ίση με τρεις φορές την ταχύτητα του ήχου. Επίσης, λέμε ότι κινείται με αριθμό Mach 3.

1.3.4 Μερικά προτεινόμενα σύμβολα για φυσικά μεγέθη

Στον Πίνακα 1.13 φαίνονται μερικά μεγέθη και τα προτεινόμενα σύμβολά τους, όχι υποχρεωτικά.

Πίνακας 1.13 *Προτεινόμενα σύμβολα μερικών φυσικών μεγεθών.*

Μέγεθος	**Σύμβολο**	**Μέγεθος**	**Σύμβολο**
στροφορμή	L, J	θερμοδυναμική θερμοκρασία	T, Θ
ποσό ουσίας	$n, (\nu)$	θερμοκρασία Κελσίου	t, θ
ορμή	P	θερμοκρασία Φαρενάιτ	t_F
σταθερά Avogadro	L, N_A	ηλεκτρικό φορτίο	q, Q
ροπή αδράνειας	I, J	ηλεκτρικό ρεύμα	i, I
γραμμομοριακή μάζα	M	πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	j, J
βάρος	F_g, G, W, P	ηλεκτρικό δυναμικό	V, Φ
ροπή (δύναμης)	M	διαφορά δυναμικού	V, U
ροπή (ζεύγους)	M, T	ηλεκτρική ροή	Φ_E, Ψ
πίεση	p, P	μαγνητική ροή	Φ_B
αριθμός σωματιδίων	N	σχετική επιτρεπτότητα ή διηλεκτρική σταθερά	ε_r, K
συγκέντρωση σωματιδίων	n	σχετική διαπερατότητα	μ_r
σχετική ατομική μάζα	A_r	μαγνητική διαπερατότητα ή διαπερατότητα του κενού	μ_0
σχετική μοριακή μάζα	M_r	ηλεκτρική σταθερά ή επιτρεπτότητα του κενού	ε_0
έργο	W	ένταση μαγνητικού πεδίου ή μαγνητική διέγερση	H
ισχύς	P, N	ένταση ηλεκτρικού πεδίου	E

1.3.5 Μερικά προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα

Στον Πίνακα 1.14 φαίνονται προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα για χρήση στις επιστήμες Μηχανικού και στη Φυσική.

Πίνακας 1.14 *Προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα.*

Σύμβολο	**Εφαρμογή**	**Σημασία**
$:=, \stackrel{\text{def}}{=}, \stackrel{d}{=}$	$a := b$	το a είναι εξ ορισμού ίσο με το b, π.χ. $p := mv$
$\triangleq$	$a \triangleq b$	το a αντιστοιχεί στο b, π.χ. αν $E = kT$, 1 eV $\triangleq$ 11 604,5 K
$\equiv$	$a \equiv b$	το πρώτο μέλος είναι ταυτοτικά ίσο με το δεύτερο, π.χ. $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
$\approx$	$a \approx b$	το a είναι περίπου ίσο με το b
$\simeq$	$a \simeq b$	το a είναι ασυμπτωτικά ίσο με το b
$\sim, \propto$	$a \sim b$	το a είναι ανάλογο του b
sgn	sgn z (z γενικώς μιγαδικό)	πρόσημο του z, $\operatorname{sgn} z = z/\lvert z\rvert,\ z \neq 0,\ \operatorname{sgn} z = 0, z = 0$
$\bar{a}, \langle a \rangle$		μέση τιμή του a

Στον Πίνακα 1.15 για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις φαίνονται το (διεθνές) σύμβολο, το όνομα στα ελληνικά και η σημασία, καθώς και κάποια σχόλια.

Πίνακας 1.15 *Κυκλικές (τριγωνομετρικές) και υπερβολικές συναρτήσεις.*

Σύμβολο	**Όνομα, σημασία**	**Σχόλια και παραδείγματα**
π	λόγος περιφέρειας κύκλου διά της διαμέτρου του	$\pi = 3{,}141\ 592\ 6\ldots$
$sin\,x$	ημίτονο του x	Γράφουμε $(sin\,x)^n$ ή $sin^n\,x$.
$cos\,x$	συνημίτονο του x	Γράφουμε $(cos\,x)^n$ ή $\cos^n x$.
$tan\,x$	εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το tg$x$.
$cot\,x$	συνεφαπτομένη του x	$cot\,x = 1/\,tan\,x$
$sec\,x$	τέμνουσα του x	$1/\,cos\,x$
$csc\,x$	συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το cosec$x$. $csc\,x = 1/\,sin\,x$
$arcsin\,x$	τόξο ημιτόνου x	Αν $y = arcsin\,x$, τότε $x = sin\,y$ και $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.
$arccos\,x$	τόξο συνημιτόνου x	Αν $y = arccos\,x$, τότε $x = cos\,y$ και $0 \leq y \leq \pi$.
$arctan\,x$	τόξο εφαπτομένης x	Χρησιμοποιείται και το arctg$x$. Αν $y = arctan\,x$, τότε $x = tan\,y$ και $-\pi/2 < y < \pi/2$.
arccot$x$	τόξο συνεφαπτομένης x	Αν $y = \mathrm{arccot}x$, τότε $x = cot\,y$ και $0 < y < \pi$.
arcsec$x$	τόξο τέμνουσας του x	Αν $y = \mathrm{arcsec}x$, τότε $x = sec\,y$ και $0 \leq y \leq \pi,\ y \neq \pi/2$.
arccsc$x$	τόξο συντέμνουσας x	Χρησιμοποιείται και το arccosec$x$. Αν $y = \mathrm{arccsc}x$ τότε $x = csc\,y$ και $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2,\ y \neq 0$.
$sinh\,x$	υπερβολικό ημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το sh$x$.
$cosh\,x$	υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το ch$x$.
$tanh\,x$	υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το th$x$.
$coth\,x$	υπερβολική συνεφαπτομένη του x	$coth\,x = 1/\,tanh\,x$
sech$x$	υπερβολική τέμνουσα του x	$\mathrm{sech}x = 1/\,cosh\,x$
csch$x$	υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το cosech$x$. $\mathrm{csch}x = 1/\,sinh\,x$
arsinh$x$	αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο του x	Χρησιμοποιούνται και τα arsh$x$, argsh$x$.
arcosh$x$	αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιούνται και τα arch$x$, argch$x$.
		Αν $y = \mathrm{arcosh}x$, τότε $x = cosh\,y\,,\, y \geq 0$
artanh$x$	αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιούνται και τα arth$x$, argth$x$.
arcoth$x$	αντίστροφη υπερβολική συνεφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το argcoth$x$. Αν $y = \mathrm{arcoth}x$, τότε $x = \mathrm{coth}y$ και $y \neq 0$.
arsech$x$	αντίστροφη υπερβολική τέμνουσα του x	Αν $y = \mathrm{arsech}x$, τότε $x = \mathrm{sech}y$ και $y \geq 0$.
arcsch$x$	αντίστροφη υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το arcosech x . Αν $y = \mathrm{arcsch}x$, τότε $x = \mathrm{csch}y$ και $y \neq 0$.

Στον Πίνακα 1.16 δίνονται οι εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

Πίνακας 1.16 *Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.*

Σύμβολο	**Σημασία**	**Σχόλια και παραδείγματα**
a^x	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το a	
e	βάση των φυσικών λογαρίθμων	$e = 2{,}718\ 281\ 8\ldots$
e^x, $\exp x$	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το e	
$log_a\, x$	λογάριθμος του x με βάση το a	Το $log\ x$ χρησιμοποιείται μόνο όταν δεν χρειάζεται ο καθορισμός της βάσης.
$ln\ \ x$	$ln\, x = log_e\, x$, φυσικός λογάριθμος του x	
$lg\, x$	$lg\, x = log_{10}\, x$, κοινός (δεκαδικός) λογάριθμος του x	
$\mathrm{lb}x$	$\mathrm{lb}x = log_2\, x$, δυαδικός λογάριθμος του x	

Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις φυσικών μεγεθών, οι οποίες είναι τριγωνομετρικές, υπερβολικές, λογαριθμικές, εκθετικές και άλλες, πρέπει να έχουν ορίσματα που είναι (καθαροί) αριθμοί, δηλαδή αδιάστατα μεγέθη. Επίσης, οι τιμές τους θα είναι καθαροί αριθμοί. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό αν κάποιος γράψει το ανάπτυγμα της συνάρτησης σε δυναμοσειρά, όπως σειρά Taylor, οι όροι του αθροίσματος είναι καθαροί αριθμοί πολλαπλασιασμένοι επί δυνάμεις του ορίσματος διαφορετικών τάξεων. Οι εξισώσεις είναι ομογενείς, οπότε όλοι οι όροι των αθροισμάτων πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις. Αυτό γίνεται μόνο αν είναι καθαροί αριθμοί.

Ένα παράδειγμα είναι η εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC που περιγράφεται από τη (σωστή) σχέση $V = V_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$. Η σχέση $\ln V = \ln V_0 - \dfrac{t}{RC}$ δεν έχει νόημα. Μια σχέση αυτής της μορφής μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει μεταξύ των αριθμητικών τιμών. Σε αυτήν την περίπτωση, $\ln\{V\} = \ln\{V_0\} - \dfrac{t}{RC}$, το $\dfrac{t}{RC}$ είναι αδιάστατο, οπότε δεν χρειάζεται να αναφερθούμε σε αριθμητικές τιμές, αφού ισχύει $\dfrac{\{t\}}{\{RC\}} = \dfrac{t}{RC}$.. Μπορούμε ακόμη να γράψουμε $\ln\dfrac{V}{V_0} = -\dfrac{t}{RC}$. Επίσης, ισχύει $\ln\dfrac{V/\mathrm{V}}{V_0/\mathrm{V}} = -\dfrac{t}{RC}$, όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονάδα βολτ. Μπορούμε να πούμε γενικώς ότι σε σωστές, δηλαδή ομογενείς φυσικές εξισώσεις, αν κάπου παρουσιάζεται ο λογάριθμος ενός μεγέθους με διαστάσεις, θα υπάρχει σίγουρα και άλλος όρος (προσθετέος) με λογάριθμο ίδιου φυσικού μεγέθους (όπως παραπάνω) έτσι που να μπορεί να οδηγήσει σε λογάριθμο αδιάστατου συνδυασμού τους.

Μερικές φορές σε γραφικές παραστάσεις, για παράδειγμα στην παραπάνω περίπτωση, γράφουν στον κατακόρυφο άξονα $\ln V$ και στον οριζόντιο το σωστό t/cm. Ο κατακόρυφος άξονας, όπως και ο οριζόντιος, έχει διαιρέσεις που αντιστοιχούν σε καθαρούς αριθμούς. Στον κατακόρυφο άξονα, παρόλο που δεν δηλώνεται (όπως θα έπρεπε), παριστάνονται οι αριθμητικές τιμές για συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης της τάσης. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να γράψουμε $\ln\left(\dfrac{V}{\mathrm{V}}\right) = \ln\left(\dfrac{V_0}{\mathrm{V}}\right) - \dfrac{t}{RC}$ και τότε όλα είναι σωστά διαστατικά. Πράγματι, μπορούμε σωστά να γράψουμε $\ln\frac{V}{\mathrm{V}}=\ln\{V\}_{\mathrm{V}}$ και $\ln\frac{V_0}{\mathrm{V}}=\ln\{V_0\}_{\mathrm{V}}$, αφού τα πηλίκα τάσης σε βολτ διά βολτ είναι καθαροί αριθμοί. Αντιστοίχως, για την ενέργεια μετρούμενη σε joule (J) μπορούμε να γράψουμε $\ln(E\,/\,\mathrm{J})$, αν η μονάδα είναι GeV γράφουμε $\ln\left(E\,/\,\mathrm{GeV}\right)$ κτλ.

Θα μπορούσε κάποιος σε κάποια προβλήματα στα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν λογάριθμοι, κατά τους ενδιάμεσους αλγεβρικούς υπολογισμούς ή εκθετικές συναρτήσεις κτλ., να μην ακολουθεί τη σωστή διαδικασία, αλλά να «επεκτείνει» μόνο συμβολικά την έννοια αυτών των συναρτήσεων, με το να τους γράφει με ορίσματα που δεν είναι καθαροί αριθμοί, ακόμη ούτε καν αριθμοί αλλά κάποια σύμβολα, τελεστές. Το τελικό όμως αποτέλεσμα πρέπει να είναι γραμμένο διαστατικά σωστά. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο, το μήνυμα είναι σαφές, απλώς ας μην ξεχνούμε την περίπτωση ορισμού εκθετικών συναρτήσεων με ορίσματα μήτρες (πίνακες) ή τανυστές με χρήση του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά τύπου Taylor. Επίσης, χαρακτηριστική είναι η περίπτωση ανάλυσης κυκλωμάτων όπου γίνεται χρήση μιγαδικών ποσοτήτων σε ενδιάμεσα βήματα υπολογισμών, ενώ το τελικό αποτέλεσμα δίνεται με πραγματικά μεγέθη.

Επισήμανση: Έστω η σχέση $y=f(x)$ μεταξύ δύο φυσικών μεγεθών x,y. Η παράγωγος της συνάρτησης $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση (gradient) στη θέση $x, f(x)$ της καμπύλης που παριστάνει αυτήν τη σχέση. Γενικώς, αν τα x,y έχουν διαφορετικές διαστάσεις, η κλίση δεν είναι εφαπτομένη κάποιας γωνίας. Σε αυτήν την περίπτωση η κλίση έχει διαστάσεις και από αυτό και μόνον δεν μπορεί να είναι εφαπτομένη γωνίας. Η εφαπτομένη γωνίας ($\tan\varphi$) είναι αδιάστατο μέγεθος όπως είναι και η ίδια η γωνία. Για να μπορεί η κλίση να είναι ίση με εφαπτομένη γωνίας, πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω: Τα δύο μεγέθη x,y πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις, οπότε η κλίση είναι αδιάστατος αριθμός, τότε αν οι κλίμακες των αξόνων όπου γίνεται η γραφική παράσταση είναι ίδιες, η κλίση είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη, στο σημείο $x, y=f(x)$, με τον άξονα x. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι η έκφραση $y=f(x)$ παριστάνει τη διαδρομή σημείου στο επίπεδο x,y και τα x,y μετριούνται σε km. Υποθέτουμε ότι οι άξονες έχουν την ίδια κλίμακα (π.χ. 1 cm στον κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 km μετατόπισης), τότε η κλίση της καμπύλης σε ένα σημείο ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που αναφέραμε προηγουμένως. Στην περίπτωση γραμμικής σχέσης, $y=a\,x+b$, a,b σταθερές, η $a=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση της σχετικής καμπύλης και είναι εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x όταν ισχύουν τα παραπάνω. Σημειώνουμε ότι η γωνία (και η εφαπτομένη της) πρέπει να είναι αναλλοίωτα μεγέθη, δηλαδή να μην εξαρτώνται από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι αν τα μεγέθη δεν έχουν ίδιες διαστάσεις και ίδιες μονάδες μέτρησης, και κάποιος επιχειρήσει να σχεδιάσει την καμπύλη λαμβάνοντας υπόψη τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών θα διαπιστώσει ότι η κλίση και επομένως και η παραπάνω γωνία θα εξαρτώνται από τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών.

Στον Πίνακα 1.17 φαίνονται τα περί διανυσμάτων και τανυστών.

Πίνακας 1.17 *Διανύσματα και τανυστές.*

Σύμβολο	**Σημασία**	**Σχόλια και παραδείγματα**
$\boldsymbol{a}, \vec{a}$	διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ ($\vec{a}$)	Το $\vec{a}$ είναι βολικό για γράψιμο με το χέρι.
$a, \lvert\boldsymbol{a}\rvert$	μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	Χρησιμοποιείται και το $\lVert\boldsymbol{a}\rVert$.
$\boldsymbol{e}_a, \vec{e}_a, \hat{\boldsymbol{a}}$	μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{a} / a, \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_a$
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$, ($\boldsymbol{e}_i$) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	μοναδιαίο διάνυσμα στις κατευθύνσεις των καρτερσιανών αξόνων συντεταγμένων	
a_x, a_y, a_z (a_i)	καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$, $\alpha_x e_x$, κτλ. είναι οι διανυσματικές συνιστώσες $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, είναι το διάνυσμα θέσης
==∇ ή $\vec{\nabla}$	τελεστής ανά δελτα	$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ή $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$
$\nabla\varphi$, **grad** φ	κλίση του φ	
$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$	απόκλιση του $\boldsymbol{a}$	
$\nabla\times\boldsymbol{a}$, rot $\boldsymbol{a}$, curl $\boldsymbol{a}$	στροβιλισμός του $\boldsymbol{a}$	
∇^2, Δ	λαπλασιανή	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\boldsymbol{T}$, $\vec{\vec{T}}$	τανυστής $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης	
$T_{xx}, T_{xy}, \ldots, T_{zz}$ ή T_{ij}	καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή $\boldsymbol{T}$	
$\boldsymbol{ab}$ ή $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$	δυαδικό γινόμενο ή τανυστικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$	
$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	τανυστικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$	εσωτερικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$	εσωτερικό γινόμενο του τανυστή $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης και του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	
$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$	βαθμωτό (scalar) γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης	

Σημειώνουμε εδώ ότι όταν ένα διάνυσμα είναι ίσο με μηδέν αυτό δηλώνεται με τη σχέση $\vec{A}=\vec{0}$ ή $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. Αυτό όμως δεν χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές στην πράξη.

Στον Πίνακα 1.18 φαίνονται τα σχετικά με τα πιο συνήθη συστήματα συντεταγμένων.

Πίνακας 1.18 *Συνήθη συστήματα συντεταγμένων.*

Σύμβολο και όνομα	**Διάνυσμα θέσης και το διαφορικό του**	**Σχόλια**
		όλα τα μοναδιαία διανύσματα σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα
καρτεσιανές x, y, z	$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$	
	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	
κυλινδρικές ρ, φ, z	$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$
	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	
σφαιρικές r, ϑ, φ	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$	$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\vartheta,\varphi), \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi),$
	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$	$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$

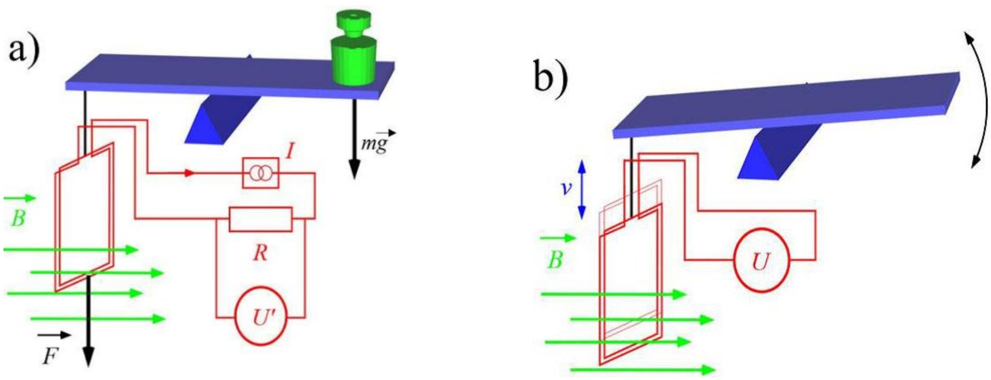
Στον Πίνακα 1.19 φαίνονται τα σχετικά με τις μήτρες (πίνακες).

Πίνακας 1.19 *Μήτρες (ή Πίνακες).*

Σύμβολο	**Σημασία**	**Σχόλια και παραδείγματα**
		Μπορεί να χρησιμοποιούνται κεφαλαία και πεζά γράμματα.
		Μπορεί να χρησιμοποιούνται αντί για παρενθέσεις αγκύλες [ ].
$\boldsymbol{A}$ ή $\begin{pmatrix} A_{11}\ldots A_{1n} \\ . \quad . \\ . \quad . \\ . \quad . \\ A_{m1}\ldots A_{mn} \end{pmatrix}$	μήτρα $\boldsymbol{A}$ τύπου m επί n	Χρησιμοποιείται και $\boldsymbol{A} = \left(A_{ij}\right)$.
$\boldsymbol{AB}$	γινόμενο των μητρών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$	$\left(\boldsymbol{AB}\right)_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk}$
$\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{I}$	μοναδιαία μήτρα	
$\boldsymbol{A}^{-1}$	αντίστροφη τετραγωνικής μήτρας	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ $\tilde{\boldsymbol{A}}$	ανάστροφη της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^{*}$	συζυγής μιγαδική της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ $\boldsymbol{A}^{\dagger}$	συζυγής ερμιτιανή της $\boldsymbol{A}$	
$\det \boldsymbol{A}$ ή $\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1n} \\ . \quad . \\ . \quad . \\ . \quad . \\ A_{n1}\ldots A_{nn} \end{vmatrix}$	ορίζουσα της ορθογώνιας μήτρας $\boldsymbol{A}$	
$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$	ίχνος της τετραγωνικής μήτρας $\boldsymbol{A}$	
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	νορμ της μήτρας $\boldsymbol{A}$	Μπορεί να οριστεί η νορμ με πολλούς τρόπους π.χ. $\lVert\boldsymbol{A}\rVert = \left(\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}\right)\right)^{1/2}$

1.3.6 Το χιλιόγραμμο και ο ζυγός του Kibble

Ο ζυγός του Kibble αρχικά ονομαζόταν ζυγός του watt (με την έννοια της μονάδας ισχύος watt). Είχε επινοηθεί το 1975 από τον Bryan Kibble και γι' αυτό αργότερα του έδωσαν το όνομά του. Πρόκειται για μια πολύπλοκη διάταξη που έχει υποστεί πλήθος βελτιώσεων στη διάρκεια πολλών ετών. Με τη χρήση του ζυγού συνδέεται η μονάδα μάζας με τη σταθερά του Planck, το μέτρο και το δευτερόλεπτο. Οι μονάδες μέτρο και δευτερόλεπτο έχουν ήδη οριστεί προηγουμένως ανεξάρτητα από τη μονάδα μάζας και τη σταθερά του Planck. Μπορεί κάποιος να βρει λεπτομέρειες για τη συσκευή και τη λειτουργία της στη βιβλιογραφία. Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στην αρχή λειτουργίας της, με τον πιο απλό τρόπο. Θα χρησιμοποιήσουμε το πολύ απλοποιημένο Σχήμα 1.2 της διάταξης.



Σχήμα 1.2 *Ο ζυγός του Kibble: (a) στατικός τρόπος, (b) δυναμικτός τρόπος.*

Τα διάφορα σύμβολα είναι ευνόητο τι παριστάνουν. Ο ζυγός του Kibble έχει δύο τρόπους λειτουργίας. Στο Σχήμα 1.2a φαίνεται σχηματικά ο λεγόμενος στατικός τρόπος και στο Σχήμα 1.2b ο δυναμικός τρόπος. Στο Σχήμα 1.2a η μαγνητική δύναμη (δύναμη Laplace) που ασκείται στο πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα I και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, εξισορροπείται από το βάρος $m\vec{g}$ της μετρούμενης μάζας. Στο Σχήμα 1.2b το πηνίο κινείται κατακόρυφα με ταχύτητα $\vec{v}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και μετριέται η επαγόμενη τάση U. Για την περίπτωση 2a έχουμε $mg = IBl$. Το l είναι το μήκος της οριζόντιας πλευράς του ορθογώνιου πηνίου. Στην πραγματική διάταξη η γεωμετρία είναι διαφορετική, το μαγνητικό πεδίο είναι ακτινικό και το πηνίο είναι κυκλικός δακτύλιος. Για την περίπτωση 2b έχουμε $U = vBl$. Το Bl είναι το ίδιο και για τις δύο περιπτώσεις, οπότε βρίσκουμε τη σχέση $UI = mgv$. Αυτό σημαίνει ότι η διάταξη οδηγεί στη σύγκριση ηλεκτρικής ποσότητας με διαστάσεις ισχύος, UI, με αντίστοιχη μηχανική ποσότητα mgv. Η εμφάνιση του γινομένου UI εξηγεί την αρχική ονομασία ζυγός του βατ (watt). Το ρεύμα I, Σχήμα 1.2a, προσδιορίζεται από την τάση U' που μετριέται στα άκρα της αντίστασης R, $I = U'/R$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση $m = UU'/(Rgv)$.

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, απλώς αναφέρουμε ότι οι μετρήσεις των U, U', R γίνονται με κβαντικά πρότυπα. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση του φαινομένου Josephson, όπου γίνεται χρήση μεγάλου πλήθους διεπαφών (junctions) Josephson σε σειρά για τη δημιουργία προτύπου τάσης. Θυμίζουμε ότι αν μια διεπαφή Josephson ακτινοβοληθεί με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας f_J, στα άκρα της εμφανίζεται τάση $U = f_J/K_J$, όπου $K_J = 2\,e/h$ είναι η σταθερά Josephson που εξαρτάται από τις δύο σταθερές, το στοιχειώδες φορτίο e και τη σταθερά του Planck h. Επίσης, γίνεται χρήση του κβαντικού φαινομένου Hall. Θυμίζουμε ότι όταν εμφανίζεται αυτό το φαινόμενο η αντίσταση είναι ίση με $R = R_K/k$, όπου R_K είναι η σταθερά Klitzing, $R_K = h/e^2$ και k (στην περίπτωσή μας) είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Παρατηρούμε πως αυτή η αντίσταση δεν εξαρτάται από το υλικό. Στην περίπτωσή μας ισχύουν οι σχέσεις, $U = nf_J/K_J, U' = n'f_J'/K_J, R = R_K/k$, όπου τα n, n' δηλώνουν το πλήθος των διεπαφών Josephson σε σειρά για να επιτευχθεί η απαιτούμενη τάση. Τελικώς έχουμε τη σχέση για τη μάζα, $m = \frac{knn'}{4}\frac{f_J f_J'}{gv}\ h$. Γίνεται χρήση της τιμής του πεδίου βαρύτητας από μετρήσεις μεγάλης ακριβείας.

1.4 Συνοπτικός πρακτικός οδηγός χρήσης του SI

Η τυποποίηση έχει σκοπό να αποτελέσει μια διεθνή γλώσσα της επιστήμης και της τεχνολογίας, την οποία να καταλαβαίνουν όλοι ανεξάρτητα από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και τη γραφή της γλώσσας τους. Η τυποποίηση δεν είναι υποχρεωτική σε όλη της την έκταση, απλώς αποτελεί μια σύσταση. Όμως, τα σύμβολα των μονάδων είναι ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ τα ίδια ανεξάρτητα του πώς προφέρεται το όνομα της μονάδας και πώς γράφεται στις διάφορες γλώσσες.

Ξεκινούμε με τη γραφή αριθμών. Το σύμβολο των δεκαδικών είναι το κόμμα (,) ή η κάτω τελεία (.). Στις διάφορες γλώσσες γίνεται χρήση του ενός ή του άλλου. Στην Ελλάδα (στα ελληνικά) έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιείται το κόμμα. Συνηθίζεται στα αγγλικά κείμενα (σίγουρα σε Βρετανία και ΗΠΑ) να χρησιμοποιείται η τελεία. Ειδικά για αριθμούς με πολλά ψηφία, συνηθίζεται χωρίς να είναι υποχρεωτικό, ομάδες τριών ψηφίων να διαχωρίζονται με κενά. Συνιστάται για αυτόν τον διαχωρισμό να μην χρησιμοποιείται κανένα σύμβολο. Δηλαδή να μην χρησιμοποιούνται κάτω τελείες στις γραφές με το κόμμα ως σύμβολο των δεκαδικών, ούτε κόμματα στις γραφές με κάτω τελεία ως δεκαδικό σύμβολο.

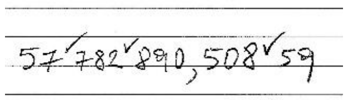
Όταν δεν ακολουθείται αυτή η πρακτική, μπορεί να οδηγηθούμε σε σύγχυση και αμφιβολία όσον αφορά το τι παριστάνει ο αριθμός. Για παράδειγμα, συνιστάται να γράφουμε στην ελληνική γραφή,

$345\ 784\ 655$

$579{,}438\ 675$

$306{,}370 \times 10^3$

Επειδή όταν γράφουμε με το χέρι είναι δύσκολο να βάζουμε κενά, κάποιοι χρησιμοποιούν στο πάνω μέρος το σημάδι του μαρκαρίσματος, δηλαδή γράφουν:



Αυτό μέχρι σήμερα δεν έχει υιοθετηθεί διεθνώς. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιείται κάτι πολύ διαφορετικό που να μην είναι ούτε η κάτω τελεία ούτε το κόμμα. Πολλές φορές γράφουν όλα τα ψηφία το ένα δίπλα στο άλλο χωρίς κενό, τότε στην περίπτωση πολλών ψηφίων είναι αδύνατο να καταλάβει κάποιος τι παριστάνει ο αριθμός, για παράδειγμα 42962006722369437801,25. Η ομαδοποίηση ανά τρία ψηφία ξεκινά από το δεκαδικό σύμβολο, αν υπάρχει, και προχωρεί προς τα μεγαλύτερης τάξης και προς τα μικρότερης τάξης ψηφία. Σε έναν ακέραιο, οι τριάδες ξεκινούν από το μικρότερης τάξης ψηφίο 35 894 653. Αν ο αριθμός είναι ακέραιος με τέσσερα ψηφία, αυτά μπορεί να μην χωρίζονται σε μια τριάδα ψηφίων και σε ένα ψηφίο, αλλά μπορεί να γράφονται και ως τετράδα, π.χ. 3475 ή 3 475 . Ανεξάρτητα αν ακολουθείται αυτός ο κανόνας ή όχι, πάντα γράφουμε τις χρονολογίες με τα τέσσερα ψηφία μαζί, για παράδειγμα 1821 ή 2022, όχι 1 821 ή 2 022. Επίσης, αν στον αριθμό υπάρχει σημάδι δεκαδικών και τέσσερα μόνο ψηφία μετά από αυτό, τότε μπορεί να γράφονται και ως τετράδα, π.χ. 23 692,7041 ή 23 692,704 1. Το ίδιο ισχύει αν υπάρχουν μόνο τέσσερα ψηφία πριν το σημάδι των δεκαδικών, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε 3482,556 ή 3 482,556. Μερικοί βάζουν τα τέσσερα τελευταία ψηφία αριθμού μαζί. Είπαμε ότι μεταξύ αριθμητικής τιμής και μονάδας μέτρησης υπάρχει διάστημα (κενό). Αυτό ισχύει και για τα μαθηματικά σύμβολα $=$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $\times$, $\cdot$., π.χ. $l = 35\ \mathrm{m}$. Αυτό δεν ισχύει για το πρόσημο αριθμών, π.χ. $+65, -32,\ \pm 76$. Επίσης, γράφουμε 75 %. Στους βαθμούς Κελσίου κτλ., γράφουμε τη μονάδα ως εξής °C, οπότε έχουμε $t = \ -32$ °C. Το kelvin έχει ως σύμβολο το K και δεν αναφέρεται ως βαθμοί Κέλβιν, απλώς λέμε 35 kelvin (κέλβιν), 35 K. Εξαίρεση του κανόνα του διαστήματος (κενού) υπάρχει στις περιπτώσεις των παρακάτω μονάδων γωνιών, όπως φαίνεται στα αντίστοιχα παραδείγματα, 5^o , $4'$, $8''$.

Τα σύμβολα των μεγεθών (ποσοτήτων) είναι συνήθως ένα γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου ανεξάρτητα από τη γλώσσα του κειμένου, με πλάγια γραφή. Μπορεί τα σύμβολα να έχουν δείκτες ή άλλα σημάδια διαφοροποίησης. Αν ο δείκτης αντιπροσωπεύει μια φυσική ποσότητα, είναι γραμμένος ως πλάγιο σύμβολο, οι άλλοι δείκτες είναι με όρθια γραφή. Οι αριθμοί δείκτες είναι όρθιοι, όμως γράμματα δείκτες που παριστάνουν αριθμούς γράφονται πλάγια. Παραδείγματα είναι τα εξής:

C_g (g: gas)	C_p (p: pressure)
g_n (n: normal)	$\sum_n a_n\theta_n$ (n: τρέχων δείκτης)
μ_r (r: relative)	$\sum_x a_x\theta_x$ (x: τρέχων δείκτης)
E_k (k: kinetic)	g_{ik} (i,k: τρέχοντες δείκτες)
χ_e (e: electric)	p_x (x: συντεταγμένη $-x$)
$T_{1/2}$ (1/2: μισό)	I_λ (λ: πλάγιο διότι είναι το μήκος κύματος)

Γινόμενα (βαθμωτών, μονόμετρων) ποσοτήτων γράφονται όπως παρακάτω:

$$ab,\ a\,b,\ a\cdot b,\ a\times b\ .$$

Για διανύσματα έχουμε τα γνωστά

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Η διαίρεση δύο ποσοτήτων μπορεί να δείχνεται ως εξής

$$\frac{a}{b}, a/b, ab^{-1}.$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις που οι ποσότητες είναι πηλίκα ή γινόμενα άλλων ποσοτήτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις το σημάδι / της διαίρεσης δεν πρέπει να ακολουθείται από σημάδι πολλαπλασιασμού ή σημάδι διαίρεσης στην ίδια γραμμή, εκτός αν χρησιμοποιηθεί παρένθεση για την αποφυγή ασάφειας. Παραδείγματα είναι τα παρακάτω:

$$\frac{ab}{c} = ab/c = abc^{-1}$$

$$\frac{a/b}{c} = (a/b)/c = ab^{-1}c^{-1},\ \text{όχι}\ a/b/c$$

όμως γράφουμε

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{bc} = a/(b\cdot c) = a/bc\ \ \text{αλλά όχι}\ a/b\cdot c.$$

Όταν μπορεί να υπάρξουν αμφιβολίες, καλό είναι να χρησιμοποιούνται κατάλληλες παρενθέσεις.

Όπως είπαμε, τα διεθνή σύμβολα των μονάδων είναι υποχρεωτικά. Τα σύμβολα των μονάδων με ειδικό όνομα (και ειδικό σύμβολο) είναι υποχρεωτικά όρθια γράμματα πεζά και δεν γράφονται στον πληθυντικό. Εξαίρεση για λόγους ιστορικούς είναι ότι η θεμελιώδης μονάδα για τη μάζα είναι το χιλιόγραμμο με σύμβολο που αποτελείται από δύο πεζά γράμματα kg. Επίσης, χρησιμοποιούνται δύο ή περισσότερα γράμματα όταν υπάρχει και άλλη μονάδα με το ίδιο σύμβολο και γενικώς αυτό γίνεται για αποφυγή παρανοήσεων.

Τα δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια (τα προθέματα) του χιλιογράμμου σχηματίζονται με το σύμβολο του γραμμαρίου. Κατ' εξαίρεση, το πρώτο γράμμα στο σύμβολο της μονάδας είναι με κεφαλαίο αν προέρχεται από κύριο όνομα. Προφανώς στην αρχή της πρότασης το πρώτο γράμμα συμβόλου ή ονόματος είναι κεφαλαίο όπως και σε τίτλους κεφαλαίων.

Για το λίτρο μπορεί να χρησιμοποιείται και το κεφαλαίο L αντί του μικρού l για να μην υπάρχει σύγχυση με τον αριθμό ένα, 1. Τα ονόματα των μονάδων γράφονται με μικρά γράμματα, ακόμη και αν προέρχονται από κύρια ονόματα.

Παρακάτω φαίνονται διάφορα πολύ γνωστά παραδείγματα:

m (meter, μέτρο)
s (second, δευτερόλεπτο)
A (ampere, αμπέρ)
Wb (weber, βέμπερ)
W (watt, βατ έχει επικρατήσει στα ελληνικά αντί του αγγλικού ουάτ)
kg (kilogram, χιλιόγραμμο)
V (volt, βολτ)
Ω (ohm, ωμ)
S (siemens, ζήμενς)
H (henry, χένρυ)
J (joule, τζουλ)
L,l (liter, λίτρο)
lm (lumen, λούμεν)
lx (lux, λουξ)
rad (radian, ακτίνιο)
sr (steradian, στερακτίνιο)
N (newton, νιούτον)

Γράφουμε $V = 240\ \mathrm{V}$, που σημαίνει ότι η τάση V (φυσικό μέγεθος με πλάγιο σύμβολο) ισούται με 240 V, η μονάδα είναι το volt (βολτ) με σύμβολο V όρθιο γράμμα. Για διανυσματικά μεγέθη μπορούμε να γράψουμε $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (3\ \mathrm{N},\ -2\ \mathrm{N},\ 5\ \mathrm{N}) = (3, -2,\ 5)\ \mathrm{N}$. Στην περίπτωση συνδυασμού συμβόλων μονάδων, ισχύουν τα εξής, $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ $\mathrm{N\ m}$ ή και Nm. Η τελευταία περίπτωση θέλει προσοχή, διότι, για παράδειγμα, αν γράψουμε mN, αυτό σημαίνει millinewton και όχι μέτρο επί νιούτον. Έχουμε και εκφράσεις μονάδων, όπως $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \mathrm{m/s},\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Τα σύμβολα των προθεμάτων είναι όρθια και κολλητά με τη μονάδα που ακολουθεί. Δεν χρησιμοποιούνται δύο προθέματα μαζί. Η αριθμητική τιμή και το σύμβολο της μονάδας είναι αλγεβρικό γινόμενο και ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της άλγεβρας. Διάφορα παραδείγματα είναι:

$1\ \mathrm{nm} = 10^{-9}\ \mathrm{m}$ όχι $1\,\mathrm{m\mu m}$

$1\ \mathrm{cm}^3 = \left(10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^3 = 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$

$1\ \mathrm{\mu s}^{-1} = \left(10^{-6}\ \mathrm{s}\right)^{-1} = 10^{6}\ \mathrm{s}^{-1}$

$1\ \mathrm{kA/m} = \left(10^{3}\ \mathrm{A}\right)/\mathrm{m} = 10^{3}\ \mathrm{A/m}$

Οι εκφράσεις για αθροίσματα και διαφορές γράφονται ως εξής:

$l = 12\,\mathrm{m} - 7\,\mathrm{m} = (12-7)\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$

$t = 28{,}4\ {}^{\circ}\mathrm{C} \pm 0{,}2\ {}^{\circ}\mathrm{C} = (28{,}4 \pm 0{,}2)\ {}^{\circ}\mathrm{C}$

(όχι $28{,}4 \pm 0{,}2\ {}^{\circ}\mathrm{C}$)

$\lambda = 220 \times (1 \pm 0{,}02)\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

Το σύμβολο % υποδηλώνει τον αριθμό 0,01, επομένως έχουμε:

$$R_1 = R_2(1 + 0{,}5\ \%) = R_2(1 + 0{,}5 \times 0{,}01) = R_2(1 + 0{,}005) = 1{,}005R_2$$

Καλό είναι να αποφεύγεται η χρήση ονομάτων των μονάδων στις περιπτώσεις που γίνονται πράξεις μεταξύ των τιμών των φυσικών μεγεθών. Όταν είναι αναγκαία η χρήση ονομάτων των μονάδων αντί των διεθνών συμβόλων τους, τα ονόματα, αν είναι στη γλώσσα του υπόλοιπου κειμένου, μπορεί να είναι και στον πληθυντικό. Αν στην ελληνική χρησιμοποιείται το όνομα με προφορά ή γραφή άλλης γλώσσας από την ελληνική, το όνομα δεν κλίνεται, ούτε χρησιμοποιείται στον πληθυντικό. Σημειώνουμε ότι οι μονάδες lux, hertz, siemens δεν έχουν πληθυντικό. Οι διάφοροι κανόνες φαίνονται στα παρακάτω:

Στα ελληνικά λέμε και γράφουμε 5 αμπέρ ανά δευτερόλεπτο ή στα αγγλικά 5 amperes per second. Πολλές φορές χρησιμοποιούνται εκφράσεις και γραφές όπως 5 αμπέρ / δευτερόλεπτο ή 5 amperes / second. Καλό είναι, όσο το δυνατόν, να μην γίνεται χρήση τέτοιων εκφράσεων. Δηλαδή, γράφουμε 60 μέτρα ανά (ή το) λεπτό, αλλά καλό είναι να αποφεύγεται το 60 μέτρα / λεπτό κτλ. Μπορεί σε ελληνικό κείμενο να γράψουμε 65 χιλιόγραμμα ή 65 kilogram, το τελευταίο χωρίς πληθυντικό. Λέμε και γράφουμε σε όλες τις γλώσσες 200 W. Στα αγγλικά μπορούμε να γράψουμε 200 watt ή 200 watts. Στα ελληνικά γράφουμε 200 watt ή 200 βατ, χωρίς πληθυντικό. Όταν οι μονάδες χρησιμοποιούνται με το πλήρες όνομα σε κάποια γλώσσα, τα προθέματα γράφονται «ολογράφως» με πεζά γράμματα, δηλαδή χιλιόμετρο ή kilometer, επίσης μεγαπασκάλ ή megapascal. Για παράγωγες μονάδες όπως η $\mathrm{Pa}s = \mathrm{Pa} \cdot s$ επιτρέπονται εκφράσεις όπως pascal second ή pascal-second ή πασκάλ δευτερόλεπτο και πασκάλ-δευτερόλεπτο. Επίσης, στα αγγλικά χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως meter per second squared, square centimeter, ampere per square meter, kilogram per cubic meter. Τα αντίστοιχα στα ελληνικά είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο, τετραγωνικό εκατοστό ή εκατοστό στο τετράγωνο, κυβικό χιλιοστό, αμπέρ ανά τετραγωνικό μέτρο, χιλιόγραμμο ανά κυβικό μέτρο.

Λίγα λόγια σχετικά με τα μαθηματικά σύμβολα. Τα σύμβολα των μεταβλητών, όπως x, y κ.τ.λ., επίσης τα σύμβολα που παριστάνουν τρέχοντες ακέραιους αριθμούς, όπως το i στο $\sum_i x_i$, γράφονται με πλάγια. Παράμετροι όπως a,b, κτλ., που μπορεί να θεωρηθούν σταθερές σε κάποιες περιπτώσεις, συμβολίζονται με πλάγια γραφή. Το ίδιο ισχύει για συναρτήσεις με τη γενική έννοια της συνάρτησης, π.χ. f, g κτλ. Όμως, μια καθορισμένη μαθηματική συνάρτηση γράφεται με όρθια γραφή. Παραδείγματα, sin, cos, exp, ln, Γ.

Μαθηματικές σταθερές των οποίων η τιμή δεν αλλάζει γράφονται με όρθια σύμβολα, π.χ. $\mathrm{e} = 2{,}718\ 281\ 8\ldots$, $\mathrm{\pi} = 3{,}141\ 592\ 6\ldots$, i (ή j) όπου $\mathrm{i}^2 = -1$. Τελεστές γράφονται με όρθια γραφή, π.χ. div, ∇, δ στο δx και τα d στις παραγώγους, όπως $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Παρόλο που δεν είναι απαραίτητο, είναι καλό πολλές φορές να μπαίνουν παρενθέσεις στα ορίσματα συναρτήσεων για να μην δημιουργούνται αμφιβολίες, για παράδειγμα $\sin \pi x$ και $\sin(\pi x)$. Στην πρώτη περίπτωση καλό είναι να υπάρχει το μικρό διάκενο που φαίνεται. Οι ειδικές συναρτήσεις όπως οι $\mathrm{J}_l(x)$, $\mathrm{N}_l(x)$, $\mathrm{P}_l(x)$ κτλ. γράφονται με όρθια σύμβολα. Καλό είναι, παρόλο που όπως αναφέραμε ξανά δεν είναι υποχρεωτικό, να χρησιμοποιούνται όσο γίνεται τα συνιστώμενα σύμβολα και για τα μεγέθη. Όμως μπορεί να υπάρχουν αποκλίσεις, διότι διάφορα μεγέθη μπορεί να έχουν το ίδιο σύμβολο. Αν υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση από τα προτεινόμενα σύμβολα, καλό είναι να υπάρχει σαφής υπόδειξη στο κείμενο. Στην περίπτωση των μονάδων, τα σύμβολα έχουν οριστεί μονοσήμαντα, υποχρεωτικά. Τέλος, αναφέρουμε ότι λέμε λόγος δύο φυσικών μεγεθών αν τα μεγέθη που διαιρεί το ένα το άλλο είναι όμοια, οπότε ο λόγος είναι αδιάστατο μέγεθος (είναι αριθμός), αντιστοίχως λέμε πηλίκο δύο μεγεθών αν διαιρούμε ανόμοια μεγέθη, οπότε το πηλίκο έχει διαστάσεις. Ο λόγος είναι ειδική περίπτωση του πηλίκου.

Στη συνέχεια λέμε λίγα λόγια για τα σύμβολα τα σχετικά με τα χημικά στοιχεία, τα νουκλίδια και τα στοιχειώδη σωματίδια. Τα σύμβολα των χημικών στοιχείων και των νουκλιδίων γράφονται με όρθια γράμματα, το πρώτο είναι κεφαλαίο. Παραδείγματα είναι, Ca(ασβέστιο), C(άνθρακας), H(υδρογόνο), He(ήλιο), N(άζωτο), Be(βηρύλιο), B(βόριο). Ο αριθμός νουκλεονίων (μαζικός αριθμός, βαρυονικός αριθμός) ενός νουκλιδίου γράφεται ως αριστερός πάνω δείκτης, π.χ. $^{14}\mathrm{N}$, $^{16}\mathrm{O}$. Χρησιμοποιείται αριστερός κάτω δείκτης για να δηλωθεί ο αριθμός των πρωτονίων, π.χ. $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Μερικές φορές στα νουκλίδια δηλώνεται με κάτω δεξιό δείκτη και ο αριθμός των νετρονίων τους. Αυτός ο αριθμός υπολογίζεται από τους δύο προηγούμενους, αλλά μερικές φορές είναι χρήσιμο να υπάρχει, έτσι έχουμε $^{235}_{92}\mathrm{U}_{143}$. Η σύσταση του ISO είναι όλα τα σωματίδια να συμβολίζονται όπως τα νουκλίδια και τα χημικά στοιχεία με όρθια γράμματα. Τα σύμβολα μπορεί να είναι πεζά ή κεφαλαία. Μερικά σύμβολα και ονόματα στα ελληνικά και αγγλικά είναι αυτά που φαίνονται παρακάτω:

φωτόνιο photon	γ	νουκλεόνιο nucleon	N
νετρίνο neutrino	$\nu, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	νετρόνιο neutron	n
ηλεκτρόνιο electron	e, β	πρωτόνιο proton	p ($^1\mathrm{H}^+$)
μιόνιο muon	μ	δευτέριο deuteron	d ($^2\mathrm{H}^+$)
ταόνιο tauon	τ	τρίτιο triton	t ($^3\mathrm{H}^+$)
σωματίδιο ταυ		ήλιο helion	h ($^3\mathrm{He}^{2+}$)
πιόνιο pion	π	σωματίδιο άλφα alpha particle	α ($^4\mathrm{He}^{2+}$)

Ο δεξιός άνω δείκτης δείχνει το φορτίο σε μονάδες του στοιχειώδους φορτίου, το οποίο ισούται με το φορτίο του πρωτονίου. Ανάλογα ισχύουν και για τα άλλα σωματίδια. Όμως, αυτός ο συμβολισμός δεν έχει γίνει καθολικά αποδεκτός από την κοινότητα των Φυσικών Στοιχειωδών Σωματιδίων (ή Φυσικών Υψηλών Ενεργειών, ΦΥΕ). Για παράδειγμα, στις επίσημες δημοσιεύσεις του CERN δεν τηρείται αυτός ο συμβολισμός, με την έννοια ότι τα σύμβολα γράφονται με πλάγια γράμματα. Η πιο ολοκληρωμένη δημοσίευση που περιέχει όλα τα σχετικά με τα Στοιχειώδη Σωματίδια είναι το Review of Particle Physics, particle data group (PDG) που εκδίδεται περιοδικά από το Institute of Physics. Μερικά βιβλία σε αυτό το αντικείμενο ακολουθούν τον συμβολισμό που συνιστά ο ISO. Σημειώνουμε εδώ, ότι το $e > 0$ είναι το σύμβολο του θεμελιώδους (στοιχειώδους) φορτίου. Αυτό ισούται με το φορτίο του πρωτονίου. Το φορτίο του ηλεκτρονίου ισούται με $-e < 0$.

Ας αναφερθούμε λίγο στην ονοματολογία διάφορων εννοιών. Μερικά από όσα ακολουθούν σχετίζονται λίγο πολύ με κανόνες γραμματικής και συντακτικού διάφορων γλωσσών, αλλά είναι δικές μας απόψεις. Λέμε και γράφουμε Joule effect και στα ελληνικά φαινόμενο Τζουλ. Το αρχικό γράμμα είναι κεφαλαίο, επειδή στο φαινόμενο έχει δοθεί ως όνομα το όνομα κάποιου προσώπου, συνήθως προς τιμή του ανθρώπου που ανακάλυψε το φαινόμενο. Το ίδιο ισχύει για περιπτώσεις όπως Lagrange equations, εξισώσεις Λαγκράνζ. Compton effect, φαινόμενο Κόμπτον. Μπορούμε όμως να πούμε και εξισώσεις του Λαγκράνζ, φαινόμενο του Compton κτλ. Αν κάνουμε το ίδιο στα ελληνικά με ελληνικά ονόματα προσώπων, τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά. Δεν μπορούμε να πούμε το φαινόμενο Παπαδόπουλος, είναι πιο αποδεκτή η έκφραση το φαινόμενο του Παπαδόπουλου, δηλαδή το φαινόμενο που τιμητικά έχει το όνομά του, αφού εκείνος το ανακάλυψε. Μπορούμε να πούμε Papadopoulos effect. Δεν μπορούμε να πούμε η εξίσωση Παπαδόπουλος αλλά η εξίσωση του Παπαδόπουλου, όμως λέμε Papadopoulos equation κτλ. Όταν από τη ρίζα του ονόματος προσώπου δημιουργείται όνομα φυσικού μεγέθους, τότε το όνομα του φυσικού μεγέθους γράφεται με το πρώτο γράμμα πεζό. Για παράδειγμα, λέμε lagrangian, λαγκρανζιανή. Τα ονόματα των χημικών στοιχείων, των νουκλιδίων και των σωματιδίων γράφονται με το πρώτο γράμμα τους πεζό. Αυτό ισχύει και αν ακόμη το όνομα προέρχεται από όνομα προσώπου. Το σύμβολο γράφεται με τον διεθνή συμβολισμό του, με όρθια γράμματα και το πρώτο του γράμμα (αν υπάρχουν περισσότερα από ένα στο σύμβολο) είναι κεφαλαίο: hydrogen υδρογόνο, H, helium ήλιο, He, fermium φέρμιο, Fm, mendelevium μεντελέβιο, Md, americium αμερίκιο, Am, pion πιόνιο, π, proton πρωτόνιο, p, επίσης κατηγορίες σωματιδίων όπως fermion φερμιόνιο, boson μποζόνιο.

Είναι καλό, όταν ορίζουμε παράγωγες μονάδες, να μην λέμε, για παράδειγμα, *πίεση είναι δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας*, αλλά *πίεση είναι δύναμη ανά επιφάνεια ή δύναμη διά επιφάνεια.*

1.4.1 Για το σωματίδιο higgs

Θα πούμε δύο λόγια για το σωματίδιο higgs (χιγγς) εκφράζοντας κυρίως και δικές μας απόψεις. Το καθιερωμένο σύμβολο είναι το H. Αν αναφερόμαστε σε περισσότερα από ένα τέτοια σωματίδια, χρησιμοποιείται για τα επιπλέον και το h. Το σωματίδιο έχει πάρει το όνομά του από τον επιστήμονα Peter Higgs. Σε αυτήν την περίπτωση δεν ακολουθήθηκε ο κανόνας που ακολουθείται για τα νουκλίδια και τα χημικά στοιχεία, όπου το όνομα του προσώπου αποτελεί τη ρίζα για το όνομα που προκύπτει. Αν γινόταν αυτό, το σωματίδιο θα μπορούσε να λέγεται higgson και στα ελληνικά χιγγσόνιο. Σε αυτήν την περίπτωση, το όνομα του προσώπου έγινε όνομα του σωματιδίου. Έχει επικρατήσει διεθνώς το όνομα του σωματιδίου στη μορφή Higgs, με το πρώτο γράμμα κεφαλαίο. Δηλαδή έχει επικρατήσει ό,τι ισχύει για φαινόμενα που αναφέραμε προηγουμένως. Όμως αυτό είναι όνομα σωματιδίου, δεν είναι όνομα φαινομένου και καλό είναι να μην γίνεται εξαίρεση σε σχέση με όλα τα άλλα σωματίδια, επομένως αναλογικά καλό είναι να γράφεται higgs, ελληνικά χιγγς, με το πρώτο γράμμα πεζό.

Η ανακάλυψή του από τα πειράματα ATLAS και CMS στο CERN το 2012 οδήγησε στο να δοθεί το Νόμπελ Φυσικής (2013) στους François Englert και Peter Higgs. Συνεργάτης του Englert ήταν ο Robert Brout, ο οποίος όταν έγινε η επιλογή για το Νόμπελ είχε πεθάνει. Σίγουρα, αν ζούσε, το Νόμπελ θα δινόταν και στους τρεις. Είναι γεγονός ότι έχει καθιερωθεί μεταξύ των επιστημόνων το όνομα higgs, όμως αξίζει να δούμε την ανακοίνωση της επιτροπής για το Νόμπελ που λέει γιατί δόθηκε στους δύο ανωτέρω επιστήμονες αυτό το βραβείο. Η ανακοίνωση λέει “for the theoretical discovery of the mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERN’s Large Hadron Collider”[1]. Στην ανακοίνωση στους δημοσιογράφους χρησιμοποιείται η έκφραση «the so called Higgs particle», δηλαδή «το λεγόμενο σωματίδιο Χιγγς». Η καθιέρωση αυτού του ονόματος αδικεί τους άλλους δύο επιστήμονες. Γι’ αυτόν τον λόγο, μερικοί επιστήμονες δίνουν στο σωματίδιο και τα τρία ονόματα μαζί, δηλαδή Brout Engler Higgs (BEH), αλλά αυτό δεν έχει επικρατήσει. Η θεωρία στην οποία στηρίζεται η ύπαρξη του σωματιδίου οφείλεται στην ερευνητική δουλειά, κυρίως των ανωτέρω τριών επιστημόνων (όμως υπάρχουν και άλλοι που έχουν σημαντική συμβολή). Αυτό το όνομα επικράτησε από πολύ νωρίς, για διάφορους λόγους. Ενδιαφέροντα είναι όσα έχει αναφέρει σχετικά με αυτό το θέμα ο Frank Close.

[1] «για τη θεωρητική ανακάλυψη του μηχανισμού που συμβάλλει στο να κατανοούμε την προέλευση της μάζας των υποατομικών σωματιδίων, και ο οποίος πρόσφατα επιβεβαιώθηκε μέσω της ανακάλυψης του προβλεπόμενου θεμελιώδους σωματιδίου, από τα πειράματα ATLAS και CMS στον Μεγάλο Επιταχυντή Αδρονίων στο CERN»

Είναι καλό που, τουλάχιστον, για τον σχετικό μηχανισμό τείνει να επικρατήσει ο όρος Brout-Englert-Higgs (BEH) mechanism. Επίσης, χρησιμοποιείται η έκφραση Brout-Englert-Higgs (BEH) field, πεδίο Brout-Englert-Higgs (πεδίο BEH). Αυτό είναι παρόμοιο με αυτό που έχει καθιερωθεί και στην περίπτωση των Glashow- Iliopoulos- Maiani, με τη χρήση του όρου GIM mechanism. Θα ήταν καλύτερα, το σωματίδιο να είχε όνομα που να σχετίζεται με την κύρια δουλειά που κάνει στη φύση, δηλαδή σχετίζεται με τη μάζα στοιχειωδών σωματιδίων. Μια επιλογή για το όνομα θα ήταν να λέγεται heavyon (χέβιον, βαρόνιο) που σημαίνει ότι σχετίζεται με τη μάζα θεμελιωδών σωματιδίων και επίσης αρχίζει με το γράμμα h που είναι αυτό που έχει καθιερωθεί. Όμως αυτό είναι προσωπική μας άποψη και επομένως δεν νομίζουμε πως μπορεί να καθιερωθεί διεθνώς.

1.4.2 Σχόλια για το ισχύον Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI)

Το ισχύον SI το οποίο στηρίζεται άμεσα σε σταθερές ορισμού ή θεμελιώδεις σταθερές, με αυτήν την έννοια μπορούμε να πούμε ότι είναι το πιο θεμελιώδες σύστημα σε σχέση με τα προηγούμενα SI και άλλα συστήματα μονάδων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι ενώ υπάρχει κάποια αυθαιρεσία στην επιλογή των φυσικών σταθερών που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, υπάρχει το ερώτημα αν ένα ειδικό σύνολο σταθερών που επιλέγεται είναι επαρκές για να ορίσει ένα σύστημα μονάδων. Για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμική άλγεβρα για να ελεγχθεί η πληρότητα ενός συγκεκριμένου συνόλου σταθερών και για να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών συνόλων σταθερών και μονάδων. Αυτό έχει γίνει για το σημερινό SI, το οποίο πράγματι είναι επαρκές για τον ορισμό συστήματος μονάδων και αναφέρεται στη βιβλιογραφία.

Αναφέρουμε επίσης ότι μπορεί να γίνει μέτρηση μαζών της τάξης μεγέθους του χιλιόγραμμου βασισμένη σε κβαντικές σταθερές και στους ορισμούς του ισχύοντος SI, όπου οι σταθερές h, e και επομένως και οι K_{J}, R_{K} έχουν ακριβείς τιμές. Αυτό, όπως είπαμε, μπορεί να γίνει με χρήση του ζυγού βατ (watt balance), σήμερα λέγεται ζυγός του Kibble (Kibble balance). Σημειώνουμε ότι κάποιες σταθερές που είχαν τιμές ακριβώς στο παλιό SI, στο σημερινό έχουν τιμές κοντά στις παλιές, αλλά αυτές προσδιορίζονται από μετρήσεις, άρα δεν είναι ακριβείς, έχουν αβεβαιότητες. Άλλες σταθερές, που εξαρτώνται μόνο από κάποιες από τις επτά σταθερές αναφοράς, έχουν τιμές ακριβώς, χωρίς αβεβαιότητες. Στον Πίνακα 1.20 δίνουμε ενδεικτικά τις τιμές κάποιων σταθερών που ήταν ακριβείς (ακριβώς) στο παλιό SI, ενώ στο ισχύον έχουν τιμές με αβεβαιότητες. Αυτές οι τιμές αλλάζουν κάθε τέσσερα χρόνια, λαμβάνοντας υπόψη τις καινούργιες καλύτερες μετρήσεις. Θυμίζουμε ότι στο παλιό SI η μαγνητική σταθερά οριζόταν ως $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$ ακριβώς. Σήμερα αυτή η σταθερά προσδιορίζεται από τη σχέση $\mu_0 = \dfrac{4\pi\alpha\hbar}{e^2 c}$, όπου έχουμε κάποιες σταθερές με τιμές ακριβώς και τη σταθερά α, η οποία είναι η σταθερά λεπτής υφής που (είναι καθαρός αριθμός) σχετίζεται με την «ισχύ, ένταση» της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, η οποία καθορίζεται πειραματικά υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Η τιμή της είναι $7,297\ 352\ 569\ 3(11) \times 10^{-3} = 1/137,035\ 999\ 084(21)$. Στη συνέχεια, η ηλεκτρική σταθερά προσδιορίζεται από τη σχέση $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$. Η θερμοδυναμική θερμοκρασία δεν ορίζεται με βάση τη θερμοκρασία T_{TPW} του τριπλού σημείου του νερού, όπως γινόταν προηγουμένως και την οποία θεωρούσαν ίση με 273,16 K ακριβώς. Σήμερα η θερμοδυναμική θερμοκρασία ορίζεται με βάση τη σταθερά Boltzmann, οπότε η θερμοκρασία του τριπλού σημείου του νερού προσδιορίζεται πειραματικά και έχει αβεβαιότητα. Η γραμμομοριακή μάζα του $^{12}\mathrm{C}$ λαμβανόταν ίση με $12\ \mathrm{g/mol}$ ακριβώς. Στο σημερινό SI το ποσό ουσίας ορίζεται με βάση τη σταθερά Avogadro που θεωρείται γνωστή ακριβώς. Αυτό έχει ως συνέπεια η παραπάνω γραμμομοριακή μάζα να βρίσκεται πειραματικά και η τιμή της να έχει αβεβαιότητα.

Παρατηρούμε ότι οι αβεβαιότητες είναι πολύ μικρές και δεν επηρεάζουν τη χρήση των μονάδων στις περισσότερες περιπτώσεις.

Πίνακας 1.20 *Μερικές σταθερές που είχαν ακριβείς τιμές, ενώ τώρα έχουν αβεβαιότητες.*

Σταθερά	**Τιμή και αβεβαιότητα**
$\mu_0 / (4\pi\times10^{-7})$	$1{,}000\,000\,000\,55(15)\ \mathrm{N\,A^{-2}}$
$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8{,}854\,187\,812\,8(13)\times10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$
T_{TPW}	$273{,}160\,00(25)\,\mathrm{K}$
γραμμομοριακή μάζα του $^{12}\mathrm{C}$ $M(^{12}\mathrm{C})$	$11{,}999\,999\,995\,8(36)\times10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}$

1.5 Συστήματα μονάδων τύπου CGS, συστήματα φυσικών μονάδων και αδιάστατες εξισώσεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναφερθούμε σε συστήματα μονάδων τύπου CGS και στις σχέσεις μεταξύ τους και με το SI. Επίσης, θα αναφερθούμε σε συστήματα φυσικών μονάδων (natural units), δηλαδή σε Φυσικά Συστήματα μονάδων. Παρόλη την επικράτηση του SI, εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται συστήματα CGS σε ερευνητικές εργασίες και σε εξειδικευμένα βιβλία, κυρίως από θεωρητικούς φυσικούς της περιοχής της σχετικιστικής θεωρίας πεδίου και θεωρίας στοιχειωδών σωματιδίων, αλλά και από άλλους θεωρητικούς φυσικούς. Αυτοί χρησιμοποιούν κυρίως φυσικά συστήματα μονάδων, όπου κάποιες γνωστές σταθερές λαμβάνονται να έχουν τιμές ίσες με μονάδα, αδιάστατες. Σε αυτά που σχετίζονται με συστήματα τύπου CGS για την περιοχή της Μηχανικής και του Ηλεκτρομαγνητισμού, θέτουμε $\hbar = 1, c = 1$. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω. Ένα από τα συστήματα που κυρίως χρησιμοποιούν είναι το σύστημα Heaviside-Lorentz, καθώς και το φυσικό σύστημα που στηρίζεται σε αυτό, το Φυσικό Σύστημα Heaviside-Lorentz. Θα ασχοληθούμε με φυσικές μονάδες στο τέλος αυτής της παραγράφου. Στα ανωτέρω συστήματα μονάδων, εκτός από τα φυσικά συστήματα, θεμελιώδη μεγέθη της μηχανικής είναι το μήκος (l), η μάζα (m) και ο χρόνος (t) ή L, M, T . Η επιλογή ενός συστήματος μονάδων σχετίζεται κυρίως με την ευκολία που παρέχει στους χρήστες του. Τονίζουμε εδώ ότι δεν υπάρχει επίσημη αλληλεπίδραση επιτροπών που ασχολούνται με το SI και επιτροπών που ασχολούνται με τα συστήματα τύπου CGS. Θεωρούμε εύλογο ότι στην πράξη οι μονάδες των μηχανικών μεγεθών, που ορίζονται στο SI, καθορίζουν τις μονάδες των μηχανικών μεγεθών των συστημάτων τύπου CGS. Αυτό είναι κατανοητό, αφού το δευτερόλεπτο είναι η θεμελιώδης μονάδα χρόνου σε όλα αυτά τα συστήματα, ενώ οι θεμελιώδεις μονάδες για το μήκος και τη μάζα των συστημάτων τύπου CGS είναι δεκαδικά υποπολλαπλάσια των θεμελιωδών μονάδων του SI, οπότε με την ευρεία έννοια, είναι μονάδες όλων των ανωτέρω συστημάτων, αν και όχι πάντοτε σύμφωνες μονάδες. Στα συστήματα τύπου CGS οι μονάδες της μηχανικής και του ηλεκτρομαγνητισμού παράγονται από τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών μήκος, μάζα και χρόνος. Παρόλο που θα μπορούσε οι μονάδες των μεγεθών της θερμότητας και άλλων περιοχών της Φυσικής να εκφραστούν στα συστήματα CGS ως παράγωγες μονάδες των τριών αυτών θεμελιωδών μονάδων, αυτό στην πράξη δεν γίνεται, αλλά εισάγονται και άλλα θεμελιώδη μεγέθη, όπως για παράδειγμα η θερμοδυναμική θερμοκρασία κτλ. Τα συστήματα αυτά είναι τα λεγόμενα *εκτεταμένα CGS*. Για την επέκτασή τους, ακολουθείται το ISQ και το SI.

Θυμίζουμε ότι το SI είναι σύστημα που περιλαμβάνει επτά θεμελιώδη μεγέθη και αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες, οπότε οι παράγωγες μονάδες του δεν εκφράζονται μόνο ως προς τις μονάδες για το μήκος, τη μάζα και τον χρόνο. Μόνο οι μηχανικές μονάδες του (όχι οι ηλεκτρομαγνητικές) εκφράζονται συναρτήσει των τριών μονάδων του μήκους της μάζας και του χρόνου. Δηλαδή, δεν ισχύει το ίδιο που ισχύει στα συστήματα CGS. Οι σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των συστημάτων μονάδων, που έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, βρίσκονται στον ηλεκτρομαγνητισμό, οπότε στη συνέχεια θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε αυτό, για τα συστήματα τύπου CGS και το SI.

1.5.1 Συστήματα μονάδων τύπου CGS

Προκύπτουν διαφορετικά συστήματα μεγεθών από την εισαγωγή διαφορετικών πολλαπλασιαστικών σταθερών στις σχέσεις μεταξύ των φυσικών μεγεθών που μπορεί να έχουν διάσταση ή να είναι αδιάστατες. Οι μονάδες επηρεάζονται από το σύστημα μεγεθών. Σε όλα τα συστήματα μονάδων που θα αναφερθούμε ισχύει για τον ηλεκτρομαγνητισμό η σχέση $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$. Επίσης, η σχέση συνέχειας για την πυκνότητα ρεύματος και φορτίου θα είναι για όλα τα συστήματα ίδια, δηλαδή η $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Θα αναφερθούμε στην αρχή σε φαινόμενα που συμβαίνουν σε κενό χώρο, δηλαδή χωρίς διηλεκτρικά.

Ο νόμος του Coulomb της ηλεκτροστατικής γράφεται σε γενική μορφή, δηλαδή για κάθε σύστημα στη μορφή:

$$F = k_1 \frac{qq'}{r^2}$$

Τα μηχανικά μεγέθη F, r είναι ήδη καθορισμένα, αφού πληρούν ίδιες σχέσεις για όλα τα συστήματα μονάδων, χωρίς τη χρήση ηλεκτρομαγνητικών ποσοτήτων. Στη συνέχεια μπορεί να γίνουν τα εξής, για κάθε συγκεκριμένο σύστημα μονάδων να οριστεί αυθαίρετα η σταθερά k_1 και αυτό να καθορίσει τη μονάδα του φορτίου ή να οριστεί η μονάδα του φορτίου και μετά να καθοριστεί η σταθερά.

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ ορίζεται σε όλα τα συστήματα μονάδων ως η δύναμη ανά μονάδα φορτίου, οπότε για την τιμή του ισχύει:

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}$$

Για μαγνητοστατικά φαινόμενα, σύμφωνα με τον Ampere, η δύναμη ανά μονάδα μήκους (f') μεταξύ δύο ευθύγραμμων παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών απείρου μήκους και απειροστής διατομής, που βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση d, μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$f' = \frac{\mathrm{d}F'}{\mathrm{d}l} = 2k_2 \frac{II'}{d}$$

Το k_2 είναι μια άλλη σταθερά, η οποία εξαρτάται από το σύστημα μονάδων. Θεωρούμε πως η δύναμη F' ασκείται στον αγωγό με ρεύμα I'. Οι σχέσεις για την F, f' δείχνουν ότι μόνο τα γινόμενα $k_1 qq'$ και $2k_2 II'$ μπορεί να μετρηθούν με βάση μηχανικά μεγέθη. Τα q, I είναι (νέα) μη μηχανικά μεγέθη που εισάγονται. Τα διάφορα συστήματα μονάδων αντιστοιχούν σε διάφορες επιλογές για τα q, I, k_1, k_2. Είναι ευνόητο ότι το πηλίκο F / f' έχει διαστάσεις μήκους. Σύμφωνα με τον ορισμό για το ρεύμα, η διάσταση του φορτίου είναι γινόμενο της διάστασης ρεύματος επί τη διάσταση του χρόνου, $\dim\ q = \dim\ I \times \dim t$. Τελικώς καταλήγουμε στο:

$$1 = \frac{\dim k_1}{\dim k_2} \frac{1}{\dim\ c_{\mathrm{w}}^2}$$

Το φυσικό μέγεθος c_{w} είναι ταχύτητα. Αυτό δείχνει ότι το πηλίκο k_1 / k_2, όταν τα μεγέθη μετριούνται σε ένα οποιοδήποτε σύστημα μονάδων, έχει διαστάσεις ταχύτητας στο τετράγωνο. Τα μεγέθη F και f'

μπορεί να μετρηθούν. Έγιναν τέτοιες μετρήσεις από τους Weber και Kohlrausch (1856) και φάνηκε ότι το $\sqrt{k_1 / k_2}$ είχε τιμή πολύ κοντά στην τότε τιμή της ταχύτητας του φωτός, στο κενό. Το ότι η ταχύτητα του φωτός συνδεόταν με την ηλεκτροστατική και τη μαγνητοστατική, ήταν ισχυρή ένδειξη πως το φως είχε ηλεκτρομαγνητική φύση. Τα παραπάνω οδηγούν στο ότι η ταχύτητα c_w ισούται με την ταχύτητα του φωτός (στο κενό), οπότε:

$$\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = c$$

Αυτό σημαίνει ότι μόνο η μία σταθερά είναι ανεξάρτητη, αν δοθεί η μία προσδιορίζεται και η άλλη. Στις μέρες μας αυτό μπορεί να συνδεθεί με το αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz της Ειδικής Σχετικότητας.

Η πυκνότητα μαγνητικής ροής ή μαγνητική επαγωγή, καλύτερα πεδίο $\vec{B}\,(B)$, ορίζεται ως ανάλογη της δύναμης διά του μήκους και (διά) του ρεύματος (f' / I'), συγκεκριμένα από τη σχέση:

$$B = \alpha \frac{f'}{I'} = 2\alpha k_2 \frac{I}{r}$$

Η α είναι μια άλλη σταθερά που εξαρτάται από το σύστημα μονάδων. Αναφερόμαστε στη δύναμη διά του μήκους μεταξύ των ρευματοφόρων αγωγών που αναφέραμε προηγουμένως. Συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται διεθνώς και αδόκιμοι όροι, όπως δύναμη ανά μονάδα μήκους κ.λπ.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον νόμο του Faraday, που για κάθε σύστημα μονάδων γράφεται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Το k_3 είναι επίσης μια σταθερά. Η τελευταία εξίσωση είναι μια από τις εξισώσεις του Maxwell. Μια άλλη εξίσωση του Maxwell είναι η:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ (δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα)}$$

Η άλλη εξίσωση του Maxwell προκύπτει από τον νόμο της δύναμης του Coulomb:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi k_1 \rho$$

Ο νόμος του Ampere με την προσθήκη από τον Maxwell του ρεύματος μετατόπισης γίνεται ακόμη μια από τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\alpha k_2 \vec{J} + \beta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Το β είναι μια πρόσθετη σταθερά. Στη συνέχεια παίρνουμε την απόκλιση (divergence) της τελευταίας και βρίσκουμε:

$$0 = -4\pi\alpha k_2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta 4\pi k_1 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Από αυτήν προκύπτει ότι:

$$\beta = \alpha k_2 / k_1$$

Όλες μαζί οι εξισώσεις του Maxwell για το κενό και για κάθε σύστημα μονάδων είναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi k_1 \rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 4\pi k_2\alpha\vec{J}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + k_3\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Για χώρο χωρίς φορτία και ρεύματα, $\vec{J} = 0,\ \rho = 0$, η δεύτερη και η τρίτη εξίσωση οδηγούν στην κυματική εξίσωση:

$$\nabla^2\vec{B} - k_3\frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Το κύμα διαδίδεται στο κενό με ταχύτητα c, οπότε ισχύει:

$$\frac{k_1}{k_3 k_2\alpha} = c^2$$

Σε συνδυασμό με τη δεσμευτική σχέση $\frac{k_1}{k_2} = c^2$ βρίσκουμε $k_3 = 1/\alpha$. Τελικώς, καταλήγουμε πως από τις τέσσερις σταθερές μόνο δύο είναι ανεξάρτητες, οι οποίες μπορεί να οριστούν αυθαίρετα και να οδηγήσουν σε διαφορετικά συστήματα μονάδων. Μπορούμε από τις k_1, k_2, k_3, α να θεωρήσουμε ανεξάρτητες τις k_1, α και να εκφράσουμε τις άλλες συναρτήσει αυτών. Θα έχουμε $k_2 = k_1/c^2,\ k_3 = 1/\alpha$.

Τώρα οι εξισώσεις του Maxwell για κάθε σύστημα παίρνουν τη μορφή:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi k_1 \rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\alpha}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 4\pi\frac{k_1\alpha}{c^2}\vec{J}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Στον Πίνακα 1.21 που ακολουθεί επιλέγουμε τα k_1, α για τα διάφορα συστήματα μονάδων και γράφουμε και τα k_2, k_3 που υπολογίζονται από αυτά, παρόλο που αυτό δεν είναι απαραίτητο. Στο SI γίνεται εισαγωγή μιας καινούργιας σταθεράς, της ε_0.

Πίνακας 1.21 *Οι διάφορες σταθερές για τα διάφορα συστήματα μονάδων.*

Σύστημα	k_1	α	$k_2 = k_1/c^2$	$k_3 = 1/\alpha$
Ηλεκτροστατικό (esu)	1	1	c^{-2}	1
Ηλεκτρομαγνητικό (emu)	c^2	1	1	1
Γκαουσιανό (gaussian)	1	c	c^{-2}	c^{-1}
Heaviside-Lorentz	$1/(4\pi)$	c	$1/(4\pi c^2)$	c^{-1}
SI	$1/(4\pi\varepsilon_0)$	1	$1/(4\pi\varepsilon_0 c^2)$	1

Σημειώνουμε εδώ ότι στο SI ορίζεται και μια ακόμη σταθερά, η μ_0, η οποία όμως συνδέεται με την ε_0 με τη σχέση $\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$. Αυτό σημαίνει πως στο SI:

$$k_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Το γκαουσιανό σύστημα και το σύστημα Heaviside-Lorentz διαφέρουν μόνο κατά έναν παράγοντα $\frac{1}{4\pi}$ στις σταθερές k_1, k_2. Το σύστημα Heaviside-Lorentz (H-L) που έχει αυτές τις σταθερές ονομάζεται *ορθολογισμένο* (rationalized) σύστημα. Αυτό σημαίνει πως λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρία του προβλήματος, δηλαδή το ότι ο γύρω χώρος καλύπτει στερεά γωνία 4π. Ορθολογισμένο είναι και το σύστημα SI. Στα δύο αυτά ορθολογισμένα συστήματα δεν υπάρχουν παράγοντες 4π στις εξισώσεις του Maxwell.

Τονίζουμε και εδώ ότι στα τέσσερα συνήθη συστήματα μονάδων τύπου CGS που φαίνονται στον Πίνακα 1.21, στο πλαίσιο της Μηχανικής και του Ηλεκτρομαγνητισμού, τα θεμελιώδη μεγέθη που παίζουν ρόλο είναι τρία, το μήκος $l\ (L)$, η μάζα $m\ (M)$ και ο χρόνος $t(T)$. Οι αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες τους είναι το εκατοστόμετρο (cm), το γραμμάριο (g) και το δευτερόλεπτο (s). Όλα τα άλλα μεγέθη εκφράζονται συναρτήσει αυτών των τριών. Στο SI, όπως ξέρουμε ήδη, τα θεμελιώδη μεγέθη είναι επτά. Αυτά που έχουν σχέση με τον ηλεκτρομαγνητισμό είναι τέσσερα, ο χρόνος (T), το μήκος (L), η μάζα (M) και το ρεύμα (I). Οι (θεμελιώδεις) μονάδες τους είναι το δευτερόλεπτο (s), το μέτρο (m), το χιλιόγραμμο (km) και το αμπέρ (A). Γενικώς, οι διαστάσεις των ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών στα διάφορα συστήματα μονάδων μπορεί να είναι διαφορετικές.

Πίνακας 1.22 *Ορισμοί μακροσκοπικών μεγεθών και διάφορες μακροσκοπικές ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις.*

Σύστημα	$\boldsymbol{\varepsilon_0'}$	μ_0'	$\vec{D}, \vec{H}$	**Διάφορες Μακροσκοπικές εξισώσεις**
Ηλεκτροστατικό (esu)	1	c^{-2}	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ $\vec{H} = c^2\vec{B} - 4\pi\vec{M}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = 4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}$
Ηλεκτρομαγνητικό (emu)	c^{-2}	1	$\vec{D} = \frac{1}{c^2}\vec{E} + 4\pi\vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = 4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B}$
Γκαουσιανό	1	1	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\vec{F}/q = \vec{E} + \frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}$

Heaviside-Lorentz	1	1	$\vec{D}=\vec{E}+\vec{P}$ $\vec{H}=\vec{B}-\vec{M}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\vec{F}/q=\vec{E}+\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}$
SI	ε_0	μ_0	$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ $\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\vec{F}/q=\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}$

Μέχρι τώρα υποθέσαμε πως δεν υπήρχε υλικό στον χώρο των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι έχουμε υλικά γραμμικά και ισοτροπικά ως προς τον ηλεκτρομαγνητισμό και θα γράψουμε διάφορες σχέσεις για χώρους μέσα σε τέτοια υλικά. Σε αυτήν την περίπτωση γίνεται εισαγωγή δύο νέων (γενικώς μακροσκοπικών) πεδίων των $\vec{D},\vec{H}$. Αυτά, μέσα στην ύλη, σχετίζονται με τη μακροσκοπική (ηλεκτρική) πόλωση $\vec{P}$ και τη μαγνήτιση $\vec{M}$. Ονομάζονται *βοηθητικά* (auxiliary) *πεδία*. Η έννοια μακροσκοπικό αναφέρεται στο ότι τα μεγέθη αυτά μέσα στην ύλη είναι κατάλληλα λαμβανόμενες μέσες τιμές μικροσκοπικών μεγεθών που σχετίζονται με τους δομικούς λίθους του υλικού. Δίνουμε τις παρακάτω σχέσεις σε γενική μορφή, δηλαδή έτσι που να ισχύουν για όλα τα παραπάνω συστήματα μονάδων.

$$\vec{D}=\varepsilon_0'\vec{E}+\lambda\vec{P}$$
$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0'}\vec{B}-\lambda\vec{M}$$

Για τα βοηθητικά πεδία χρησιμοποιούνται διάφορα ονόματα, μεταξύ αυτών, το $\vec{D}$ ονομάζεται *πυκνότητα ηλεκτρικής ροής* (electric flux density) ή *διηλεκτρική μετατόπιση* (dielectric displacement), καλύτερα πεδίο $\vec{D}(D)$. Το $\vec{H}$ ονομάζεται *ένταση μαγνητικού πεδίου* (magnetic field intensity), καλύτερα πεδίο $\vec{H}(H)$. Τα $\varepsilon_0',\mu_0',\lambda$ είναι σταθερές που εξαρτώνται από το σύστημα μονάδων και το υλικό που μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει και το κενό. Στον Πίνακα 1.22 δίνονται διάφοροι ορισμοί και εξισώσεις για την περίπτωση γραμμικών και ισοτροπικών υλικών. Σημειώνουμε ότι η σταθερά $\lambda=4\pi$ για τα μη ορθολογισμένα συστήματα, δηλαδή τα esu, emu, gaussian και $\lambda=1$ για τα ορθολογισμένα, δηλαδή για το H-L και το SI.

Για γραμμικά και ισοτροπικά υλικά ισχύουν για όλα τα συστήματα μονάδων οι (γενικές) σχέσεις:

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$
$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

Αυτές ονομάζονται *συστατικές σχέσεις* (constitutive relations).Τέτοιες σχέσεις στη Φυσική συνδέουν κάποια διέγερση ενός μέσου (εδώ $\vec{E},\vec{H}$) με το αποτέλεσμα της διέγερσης (εδώ $\vec{D},\vec{B}$). Τα ε,μ είναι σταθερές που εξαρτώνται από το σύστημα μονάδων και το υλικό. Το ε ονομάζεται *επιτρεπτότητα* (permittivity) και το μ ονομάζεται *μαγνητική διαπερατότητα* (magnetic permeability).

Στο σύστημα SI $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, όπου $\varepsilon_r (= \varepsilon / \varepsilon_0)$ είναι αδιάστατο μέγεθος που εξαρτάται από το υλικό και ονομάζεται *διηλεκτρική σταθερά* ή *σχετική επιτρεπτότητα* (relative permittivity), για το κενό έχουμε $\varepsilon_r = 1$. Το ε_0 ονομάζεται *επιτρεπτότητα του κενού*. Το όνομα προέρχεται από την παλιά εποχή που υπήρχε η έννοια του αιθέρα με κάποιες ιδιότητες παρόμοιες με αυτές της ύλης. Βέβαια και σήμερα το κενό δεν είναι ακριβώς κενό, αλλά δεν έχει σχέση με τον αιθέρα. Καλύτερο όνομα είναι η *ηλεκτρική σταθερά*. Στο σύστημα SI ισχύει $\mu = \mu_r \mu_0$. Το $\mu_r (= \mu / \mu_0)$ είναι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα, είναι αδιάστατη ποσότητα που εξαρτάται από το υλικό. Το μ_0 ονομάζεται *μαγνητική διαπερατότητα του κενού* (και πάλι παλιά ονομασία από την εποχή του αιθέρα), σήμερα, καλύτερη είναι η ονομασία *μαγνητική σταθερά*. Στο σύστημα esu, το ε είναι αδιάστατο μέγεθος που εξαρτάται από το υλικό. Ισούται με το ε_r του SI, για το κενό $\varepsilon = 1$.

Άλλο φυσικό μέγεθος είναι η *ηλεκτρική επιδεκτικότητα* (electric susceptibility) που θα παριστάνουμε με το χ_e. Στο SI ορίζεται από τη σχέση $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ και στα συστήματα esu, γκαουσιανό και Heaviside-Lorentz από τη σχέση $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$. Αυτό είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που έχει την ίδια τιμή στα ορθολογισμένα και ίδια τιμή στα μη ορθολογισμένα συστήματα, η τιμή εξαρτάται από το υλικό. Στα ορθολογισμένα ισχύει $\chi_e = \varepsilon_r - 1$. Στα μη ορθολογισμένα $\chi_e = (\varepsilon_r - 1)/(4\pi)$.

Υπάρχει και η *μαγνητική επιδεκτικότητα,* χ_m (magnetic susceptibility), η οποία στα συστήματα emu, γκαουσιανό, H-L και SI ορίζεται από τη σχέση $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Πρόκειται για αδιάστατη ποσότητα που εξαρτάται από το υλικό, στα ορθολογισμένα ισχύει $\chi_m = \mu_r - 1$, στα μη ορθολογισμένα έχουμε $\chi_m = (\mu_r - 1)/(4\pi)$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στους ορισμούς μερικών ηλεκτρομαγνητικών μονάδων στα παραπάνω πέντε συστήματα και στις τιμές των διάφορων σταθερών. Ας ξεκινήσουμε από το SI. Έχουμε δει ότι το θεμελιώδες φορτίο ορίζεται να έχει ακριβή τιμή σε coulomb. Αυτό καθορίζει τη μονάδα ρεύματος, το ampere, αφού έχει οριστεί η μονάδα χρόνου και ισχύει η γνωστή σχέση $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$. Υπενθυμίζουμε ότι προηγουμένως η μονάδα ρεύματος οριζόταν κατά τα γνωστά, από τη δύναμη ανά μονάδα μήκους μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών σε καθορισμένη μεταξύ τους απόσταση κτλ. Αυτό σήμαινε ότι για τη μαγνητική σταθερά ίσχυε $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ ακριβώς. Στη συνέχεια η ηλεκτρική σταθερά υπολογιζόταν από τη σχέση $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = \left(\dfrac{10^7}{4\pi c^2} \dfrac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \right) \dfrac{1}{c^2}$. Είναι ευνόητο ότι αφού και το c ήταν από τότε ακριβώς καθορισμένο, ακριβώς καθορισμένο ήταν και το ε_0. Στο ισχύον SI, το ρεύμα καθορίζεται από το θεμελιώδες φορτίο, οπότε το μ_0 δεν είναι ακριβώς καθορισμένο και φυσικά ούτε το ε_0. Όμως, επειδή οι τιμές των σταθερών του SI έχουν ληφθεί έτσι που να μην υπάρξει μεγάλη μεταβολή στις υπόλοιπες σταθερές, ισχύει ότι $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$. Δηλαδή οι τιμές των μ_0, ε_0 για πλείστες εφαρμογές δεν διαφέρουν από τις παλιές.

Τώρα ακολουθείται η ίδια σειρά, δηλαδή πρώτα υπολογίζεται η σταθερά μ_0 από τη μέτρηση της (αδιάστατης) σταθεράς λεπτής υφής (fine structure constant), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mu_0 = \frac{4\pi\hbar}{e^2 c} \alpha$$

και μετά υπολογίζεται η ε_0. Ισχύει ότι

$\mu_0 = 1,256\ 637\ 062\ 12(19) \times 10^{-6}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$ ή $\mu_0 / (4\pi \times 10^{-7}) = 1,000\ 000\ 000\ 55(15)\ \mathrm{N\ A^{-2}}$

$\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 8128(13) \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το ηλεκτροστατικό σύστημα μονάδων (electrostatic, esu). Μερικοί, όταν μιλούν για μετατροπές μονάδων μεταξύ συστημάτων, δεν χρησιμοποιούν ισότητες, διότι (γενικώς) τα μεγέθη έχουν διαφορετικές διαστάσεις, αλλά αναφέρονται σε ισοδυναμία μεταξύ των μονάδων και χρησιμοποιούν αντί του συμβόλου της ισότητας το σύμβολο $\Leftrightarrow$, δηλαδή $1\ \mathrm{C} \Leftrightarrow 2{,}997\ 924\ 5810(5) \times 10^9\ \mathrm{statC}$, που σημαίνει ότι 1 C ισοδυναμεί με $2{,}997\ 924\ 5810(5) \times 10^9\ \mathrm{statC}$. Εμείς εδώ, προς το παρόν, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο της ισότητας. Η μονάδα για το φορτίο είναι παράγωγη μονάδα και καθορίζεται από τις εξισώσεις μεταξύ των φυσικών μεγεθών του κάθε συστήματος. Για να βρούμε την ισοδυναμία των αντίστοιχων μονάδων διαφορετικών συστημάτων μονάδων, μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Στην περίπτωση του φορτίου, ουσιαστικά αυτό που εννοείται είναι ότι φορτία των δύο συστημάτων οδηγούν στο ίδιο φυσικό αποτέλεσμα, π.χ. στην ίδια ηλεκτροστατική έλξη ή άπωση μεταξύ φορτίων. Στο σύστημα esu ορίζεται η μονάδα φορτίου από τον νόμο του Coulomb γραμμένο στη μορφή για το συγκεκριμένο σύστημα μεγεθών και μονάδων, δηλαδή από τη σχέση που δίνει τη δύναμη μεταξύ δύο ίσων φορτίων:

$$F_{\mathrm{es}} = \frac{q_{\mathrm{es}}^2}{r_{\mathrm{es}}^2}$$

Συγκεκριμένα, αν τα δύο ίσα φορτία βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση $r = 1\ \mathrm{cm}$ και η μεταξύ τους δύναμη είναι $F = 1\ \mathrm{dyne} = 1\ \mathrm{dyn}$, τότε το φορτίο του καθενός q_{esu}, ορίζεται ως

$$1\mathrm{esu} = 1\mathrm{statCoulomb} = 1\mathrm{statC} = 1\ \mathrm{franklin} = 1\mathrm{Fr}\ \text{(η μονάδα φορτίου).}$$

Υπάρχουν διάφορα ονόματα για τις μονάδες των συστημάτων τύπου CGS. Συνηθέστερα ονόματα είναι αυτά του SI με την προσθήκη του stat, π.χ. statC που είδαμε προηγουμένως. Η σχέση μεταξύ coulomb (C) και statcoulomb (statC) μπορεί να βρεθεί ως εξής: Σημειώνουμε ότι μερικές φορές, όπως εδώ, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για τα ίδια μεγέθη στα διαφορετικά συστήματα μονάδων. Η δύναμη, F, μεταξύ δύο ίσων φορτίων, q, σε μεταξύ τους απόσταση r, στο SI δίνεται από τη σχέση $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{r^2}$. Στο esu έχουμε την προηγούμενη σχέση $F_{\mathrm{es}} = \dfrac{q_{\mathrm{es}}^2}{r_{\mathrm{es}}^2}$. Είναι ευνόητο ότι ισχύουν $F_{\mathrm{es}} = 10^5 \times F$ (αφού $1\ \mathrm{N} = 10^5\ \mathrm{dyn}$) και $r_{\mathrm{es}} = 10^2 \times r$ (αφού $1\ \mathrm{m} = 10^2\ \mathrm{cm}$). Αυτά οδηγούν στην εξίσωση: $10^5 \times \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{r^2} = \dfrac{q_{\mathrm{es}}^2}{10^4 r^2}$, οπότε τελικώς $1\ \mathrm{C} = \left\{\sqrt{\dfrac{10^9}{4\pi\varepsilon_0}}\right\}_{\mathrm{SI}} \mathrm{statC}$. Ο συμβολισμός δηλώνει πως η αριθμητική τιμή $\{\ \}_{\mathrm{SI}}$ υπολογίζεται στο SI.

Μια παραλλαγή της ανωτέρω μεθόδου είναι αυτή που ακολουθεί: Υπολογίζουμε τη δύναμη με τη σχέση του SI (σε N) όταν το καθένα από τα δύο φορτία είναι 1 C και βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους 1 m. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη δύναμη σε dyn δύο φορτίων ίσων με 1 statC που βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση 1 m (στο σύστημα esu). Συγκρίνουμε τις δυνάμεις και βλέπουμε πως για να γίνουν ίσες πρέπει το φορτίο σε statC να πολλαπλασιαστεί επί μια σταθερά *α*. Λέμε ότι $1\ \mathrm{C} = \alpha \times 1\mathrm{statC}$. Έχουμε $F_{\mathrm{SI}} = \dfrac{1}{4\pi\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}}\mathrm{N}$ και $F_{\mathrm{esu}} = \dfrac{1}{10^4}\mathrm{dyn} = 10^{-9}\ \mathrm{N}$. Αυτό σημαίνει (εφόσον τα φορτία είναι στο τετράγωνο) ότι $\dfrac{1}{4\pi\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}}=\alpha^2\times10^{-9}$, επομένως βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα όπως προηγουμένως, $\alpha=\left\{\sqrt{\dfrac{10^9}{4\pi\varepsilon_0}}\right\}_{\mathrm{SI}}$

, άρα 1 C = $\left\{\sqrt{\dfrac{10^9}{4\pi\varepsilon_0}}\right\}_{\mathrm{SI}}$ statC.

Στο παλιό SI είχαμε την ακριβή σχέση $\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}=\left\{\dfrac{10^7}{4\pi c^2}\right\}_{\mathrm{SI}}$ και αυτό οδηγούσε στο ότι $1\ \mathrm{C}=\{10c\}_{\mathrm{SI}}$ statC ακριβώς. Αυτό πλέον ισχύει κατά προσέγγιση, η σχέση μπορεί να γράφεται στη μορφή $1\ \mathrm{C}=2{,}997\ 924\ 5810(5)\times10^9$ statC ,το σχετικό σφάλμα είναι της τάξης του σφάλματος του ε_0, δηλαδή $1{,}5\times10^{-10}$. Οι άλλες μονάδες ορίζονται με χρήση των σχετικών εξισώσεων και λέγονται statA, statV, statΩ κτλ.

Θα μιλήσουμε τώρα για το ηλεκτρομαγνητικό σύστημα μονάδων (electromagnetic, emu). Σε αυτήν την περίπτωση ξεκινούμε από το ρεύμα και στη συνέχεια ορίζονται οι άλλες μονάδες. Τα ονόματα των μονάδων έχουν ως πρώτο συνθετικό το ab από τη λέξη absolute (απόλυτο), abampere (abA). Αυτή η μονάδα λέγεται και biot (Bi) προς τιμή του Biot. Έχουμε abcoulomb (abC), abΩ κτλ. Η σχέση που δίνει τη δύναμη διά του μήκους μεταξύ δύο απείρου μήκους λεπτών ευθύγραμμων αγωγών που διαρρέονται από ίδιο ρεύμα I_{m} και βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση r_{m}, είναι:

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{L_{\mathrm{m}}}=2\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{r_{\mathrm{m}}}\ .$$

Οι μονάδες για τα μηχανικά μεγέθη είναι αυτά που ισχύουν για τα συστήματα τύπου CGS. Η μονάδα για το ρεύμα στο emu είναι το abA. Ορίζεται ως 1 abA το ρεύμα εκείνο που αν $r_{\mathrm{m}}=1\ \mathrm{cm}$, στην παραπάνω περίπτωση, οδηγεί σε δύναμη $2\,\mathrm{dyn/cm}$. Η ίδια δύναμη στο SI είναι:

$$\frac{F}{L}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{r}\ .$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως πριν.

Ισχύει $\dfrac{10^5}{10^2}\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I^2}{r}=2\dfrac{I_{\mathrm{m}}^2}{10^2\times r}$, αυτό οδηγεί στο ότι $1\ \mathrm{A}=\left\{\dfrac{10^5\times\mu_0}{4\pi}\right\}_{\mathrm{SI}}$ abA. Στο παλιό SI $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$ ακριβώς, οπότε είχαμε $1\ \mathrm{A}=10^{-1}$ abA ακριβώς. Σήμερα αυτό δεν ισχύει, έχουμε $1\ \mathrm{A}\approx0{,}1$ abA με σχετικό σφάλμα της τάξης του $1{,}5\times10^{-10}$.

Τα άλλα μεγέθη έχουν μονάδες που βρίσκονται με χρήση των σχετικών εξισώσεων. Για παράδειγμα το 1 abC θα σχετίζεται με το C με ίδια σχέση όπως η προηγούμενη. Στο γκαουσιανό σύστημα οι ηλεκτρικές μονάδες ορίζονται όπως στο esu και οι μαγνητικές όπως στο emu.

Το σύστημα H-L είναι η ορθολογισμένη μορφή του γκαουσιανού. Τα δύο συστήματα μοιάζουν πολύ, αλλά δεν είναι ακριβώς ίδια. Οι θεμελιώδεις διαστάσεις είναι ίδιες σε αυτά τα δύο συστήματα, είναι οι διαστάσεις του μήκους, της μάζας και του χρόνου, οι παράγωγες μονάδες έχουν την ίδια έκφραση ως προς τις θεμελιώδεις μονάδες που είναι και στις δύο περιπτώσεις τα cm, g, s. Όμως οι παράγωγες μονάδες του ηλεκτρομαγνητισμού για το σύστημα H-L δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες με τις αντίστοιχες μονάδες του γκαουσιανού, αφού οι εξισώσεις τους μπορεί να διαφέρουν κατά παράγοντες που περιέχουν το 4π, μια αδιάστατη σταθερά. Δηλαδή τα συστήματα μεγεθών στις δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι ακριβώς ίδια.

Το H-L, όπως είπαμε, προτιμάται ως σύστημα μονάδων σε μερικές από τις περιοχές της επιστήμης, επίσης σε αυτό στηρίζεται ένα είδος από φυσικές (natural) μονάδες που χρησιμοποιούνται κυρίως σε αυτές τις περιπτώσεις. Φυσικές μονάδες μπορεί να προκύψουν και με βάση το SI. Αν στην περίπτωση του SI συμπεριλάβουμε και ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, τότε το ρεύμα είναι μέρος των θεμελιωδών μεγεθών, οπότε οι θεμελιώδεις μονάδες είναι τέσσερις, άρα πρέπει και οι φυσικές σταθερές να είναι αντί για δύο τρεις, δηλαδή θα έχουμε ότι στις φυσικές μονάδες $\hbar = 1, c = 1$ και επιπλέον $\varepsilon_0 = 1$. Αφού $c = 1$, θα ισχύει και η σχέση, $\mu_0 = 1$. Αν επεκταθούμε και σε φαινόμενα της θερμότητας, τότε στα θεμελιώδη μεγέθη εισέρχεται και η θερμοδυναμική θερμοκρασία, οπότε έχουμε για τη σταθερά του Boltzmann, $k = 1$. Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί ακόμη περισσότερο λαμβάνοντας υπόψη και άλλες σταθερές. Οι λεπτομέρειες θα φανούν αργότερα.

Στον Πίνακα 1.23 φαίνονται οι αντικαταστάσεις μεγεθών που οδηγούν από τις εξισώσεις στο σύστημα H- L στις εξισώσεις στο SI, δηλαδή απεικονίζεται ένα είδος «συνταγής», ένα «λεξικό», κανόνες.

Πίνακας 1.23 *Πίνακας μετατροπής από το σύστημα Heaviside-Lorentz στο SI.*

Μέγεθος	**Heaviside-Lorentz**	**SI**
	αρχικό	**τελικό**
Ταχύτητα του φωτός	c	$(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$
Ηλεκτρικό πεδίο (δυναμικό, τάση)	$\vec{E}(\Phi, V)$	$\sqrt{\varepsilon_0}\vec{E}(\Phi, V)$
Πυκνότητα φορτίου (φορτίο, πυκνότητα ρεύματος, ρεύμα, πόλωση, μετατόπιση)	$\rho(q, \vec{J}, I, \vec{P}, \vec{D})$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\rho(q, \vec{J}, I, \vec{P}, \vec{D})$
Μαγνητική επαγωγή (μαγνητική ροή, διανυσματικό δυναμικό)	$\vec{\mathrm{B}}(\Phi, \vec{\mathrm{A}})$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}(\vec{\mathrm{B}}, \Phi_m, \vec{A})$
Ένταση μαγνητικού πεδίου (μαγνητική ροπή, μαγνήτιση)	$\vec{H}(\vec{m}, \vec{M})$	$\sqrt{\mu_0}\vec{H}(\vec{m}, \vec{M})$
Διηλεκτρική σταθερά (σχετική μαγνητική διαπερατότητα)	$\varepsilon(\mu)$	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\frac{\mu}{\mu_0})$
Ηλεκτρική επιδεκτικότητα (μαγνητική επιδεκτικότητα)	$\chi_e(\chi_m)$	$\chi_e(\chi_m)$
Αντίσταση (ειδική αντίσταση, αυτεπαγωγή)	$R(\rho, L)$	$\varepsilon_0 R(\rho, L)$
Ειδική αγωγιμότητα (χωρητικότητα)	$\sigma(C)$	$\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(C)$

Σύμφωνα με αυτήν τη «συνταγή», τα σύμβολα των μηχανικών μεγεθών δεν μετασχηματίζονται, παραμένουν τα ίδια. Είναι εύκολο να κατανοηθεί πώς γίνεται η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μετάβαση από το SI στο H-L. Σε αυτήν την περίπτωση, οι πολλαπλασιαστές φεύγουν από την τρίτη στήλη και το αντίστροφό τους πολλαπλασιάζει τη δεύτερη στήλη.

Δίνουμε παραδείγματα εφαρμογής του Πίνακα 1.23.

Στο σύστημα Heaviside-Lorentz έχουμε την εξίσωση του Maxwell, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$. Χρησιμοποιούμε τον πίνακα, οπότε αντικαθιστούμε τα ρ και $\vec{E}$ (της δεύτερης στήλης) με τα αντίστοιχά τους της τρίτης στήλης, δηλαδή βρίσκουμε

$$\vec{\nabla}\cdot(\sqrt{\varepsilon_0}\vec{E})=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\rho\,.$$

Τελικώς έχουμε τη γνωστή σχέση για την εξίσωση Maxwell στο SI,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Η δύναμη Lorentz διά του φορτίου στο σύστημα Heaviside-Lorentz είναι,

$$\frac{\vec{F}}{q}=\vec{E}+\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}\ .$$

Με την αντικατάσταση θα έχουμε:

$$\frac{F}{(q/\sqrt{\varepsilon_0})}=\sqrt{\varepsilon_0}\vec{E}+\vec{\upsilon}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\vec{B}/\sqrt{\mu_0}\ .$$

Τελικώς έχουμε τη γνωστή σχέση στο SI

$$\vec{F}/q=\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε το αντίστροφο, η εξίσωση $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ισχύει στο SI. Για να τη γράψουμε στο H-L, κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$\vec{E}\rightarrow\vec{E}/\sqrt{\varepsilon_0}\qquad \rho\rightarrow\sqrt{\varepsilon_0}\rho\,,$$

οπότε βρίσκουμε

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}/\sqrt{\varepsilon_0})=\frac{\rho\sqrt{\varepsilon_0}}{\varepsilon_0}.$$

Τελικώς καταλήγουμε στη σχέση στο H-L,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho\,.$$

Στη βιβλιογραφία και στο Διαδίκτυο υπάρχουν όλες οι «συνταγές» (κανόνες) μετατροπής μεταξύ των παραπάνω συστημάτων μονάδων ανά ζεύγη.

1.5.2 Φυσικά συστήματα μονάδων

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε πιο λεπτομερειακά στις Φυσικές Μονάδες που χρησιμοποιούνται στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων και βασίζονται, κυρίως, σε συστήματα τύπου CGS και κυρίως στο H-L. Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των διάφορων συστημάτων μονάδων τύπου CGS, ακόμη και στα εκτεταμένα, όσον αφορά τις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών της Μηχανικής, αφού σε όλα αυτά τα συστήματα, τα συστήματα μεγεθών είναι ίδια και τα θεμελιώδη μεγέθη είναι ίδια, το μήκος, η μάζα και ο χρόνος. Όπως είδαμε, υπάρχουν διαφορές στις διάφορες σχέσεις του ηλεκτρομαγνητισμού, πράγμα που οδηγεί σε διαφορές και στις μονάδες τους. Αν στο SI περιοριστούμε σε ανάλυση που αναφέρεται μόνο σε μεγέθη της Μηχανικής, έχουμε ίδιο σύστημα μεγεθών, επομένως οι διαστάσεις των μεγεθών είναι ίδιες και σε αυτήν την περίπτωση.

Η χρήση των φυσικών συστημάτων μονάδων διευκολύνει τους ενδιάμεσους υπολογισμούς, διότι κάποιες σταθερές που μπορεί να εισέρχονται στο πρόβλημα γίνονται μονάδες και έτσι οι εξισώσεις είναι απλούστερες, με αποτέλεσμα να μειώνεται η πιθανότητα να γίνουν σφάλματα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι πιο βολικό να δίνεται αφού γίνει επανάκτηση των σταθερών, δηλαδή σε σύνηθες σύστημα μονάδων. Η χρήση φυσικών μονάδων μπορεί να γίνει ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν στο πρόβλημα οι εν λόγω σταθερές. Όταν δεν υπάρχουν οι σταθερές, η χρήση του φυσικού συστήματος δεν βοηθά σε κάτι, όμως εμείς θα παρουσιάσουμε τη γενική θεωρία ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή όχι σταθερών. Στο τέλος θα αναφερθούμε και στο γενικότερο θέμα της μετατροπής εξισώσεων φυσικής σε αδιάστατη μορφή, πράγμα που, εκτός των άλλων, εξυπηρετεί τον σκοπό της αποφυγής λαθών σε ενδιάμεσους υπολογισμούς που αναφέραμε παραπάνω. Υπάρχουν διάφορες επιλογές Φυσικών Μονάδων, βολικές σε διάφορους κλάδους της Φυσικής που δεν θα μας απασχολήσουν όλες εδώ, αλλά γίνονται εύκολα κατανοητές αν ακολουθήσουμε ανάλογες διαδικασίες με αυτήν της ειδικής περίπτωσης που εξετάζουμε. Στην περίπτωσή μας οι θεμελιώδεις σταθερές (ή σταθερές αναφοράς) που χρησιμοποιούνται είναι η ανηγμένη σταθερά του Planck και η ταχύτητα του φωτός (στο κενό). Αυτές λαμβάνονται ως $\hbar = 1 \quad c = 1$. Δηλαδή σε αυτές τις Φυσικές Μονάδες, η ανηγμένη σταθερά του Planck και η ταχύτητα του φωτός θεωρούνται αδιάστατα μεγέθη με τιμή ίση με τη μονάδα.

Μπορεί να ακολουθήσει κάποιος απλή διαδικασία και να δώσει «συνταγές» για μετάβαση από ένα σύνηθες σύστημα μονάδων σε αντίστοιχο φυσικό σύστημα και αντιστρόφως. Εδώ θα είμαστε κάπως πιο αυστηροί στη διαδικασία. Η ιδέα είναι η εξής: στις περιπτώσεις που αναφέραμε, τα παράγωγα μεγέθη μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των τριών θεμελιωδών μεγεθών (μεγέθη αναφοράς). Τα σύμβολα για τα θεμελιώδη μεγέθη, δηλαδή τον χρόνο, το μήκος και τη μάζα, είναι τα T, L, M. Εδώ χρησιμοποιούμε αυτή τη σειρά όμοια με τη σειρά για τα θεμελιώδη μεγέθη του SI. Στα συστήματα τύπου CGS, οι αντίστοιχες μονάδες είναι το δευτερόλεπτο $[T]_{\text{CGS}} = \text{s}$, το εκατοστό $[L]_{\text{CGS}} = \text{cm}$ και το γραμμάριο $[M]_{\text{CGS}} = \text{g}$. Στο σύστημα SI, οι θεμελιώδεις μονάδες είναι το δευτερόλεπτο $[T]_{\text{SI}} = \text{s}$, το μέτρο $[L]_{\text{SI}} = \text{m}$ και το χιλιόγραμμο $[M]_{\text{SI}} = \text{kg}$. Στην περίπτωση των Φυσικών Μονάδων, ως τρία θεμελιώδη μεγέθη θα πάρουμε τη στροφορμή (I), που έχει διαστάσεις στροφορμής αλλά και δράσης, με μονάδα μέτρησης την $[\hbar]$ που σχετίζεται με την ανηγμένη σταθερά του Planck $\hbar$, την ταχύτητα (υ), με μονάδα την $[c]$ που σχετίζεται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό c και την ενέργεια (E), με μονάδα $[E]$ αρχικά το erg ή το joule (τζουλ), αλλά τελικά μπορούμε να μετασχηματίσουμε αυτό το αποτέλεσμα που ισχύει για το αρχικό σύστημα μονάδων, CGS ή SI, ώστε να χρησιμοποιήσουμε το eV ή κάποιο δεκαδικό πολλαπλάσιό του. Εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το GeV. Λέμε ότι οι «νέες» μονάδες σχετίζονται με τις σταθερές αναφοράς και την ενέργεια, με την έννοια ότι μπορεί να έχουν την ίδια τιμή με αυτές ή να είναι πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσιά τους. Αυτά σημαίνουν ότι οι μονάδες αναφοράς στα συνήθη (αρχικά) συστήματα, CGS και SI, μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των μονάδων που σχετίζονται με τις παραπάνω σταθερές, όπως ισχύει και το αντίστροφο. Από αυτό γίνεται κατανοητό γιατί το πλήθος των αρχικών (συνήθων) θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να είναι ίσο με το πλήθος των θεμελιωδών σταθερών συν ένα, αφού υπάρχει και η ενέργεια. Το αν ισχύει αυτή η δυνατότητα, χωρίς να οδηγεί σε ασυνέπειες, μπορεί να ελεγχθεί με χρήση Γραμμικής Άλγεβρας. Αυτό είδαμε ότι ισχύει και στην επιλογή των επτά σταθερών ορισμού στο σύγχρονο σύστημα SI. Θα το δείξουμε εδώ με τη διαδικασία που ακολουθεί, η οποία είναι πλέον χρονοβόρα, αλλά εννοιολογικά απλούστερη από αυτή που ακολουθήσαμε προηγουμένως.

Οι νέες μονάδες $[\hbar], [c], [E]$ συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις ως προς τις αρχικές θεμελιώδεις μονάδες, $[T], [L], [M]$:

$$[\hbar] = [T]^{-1}[L]^{2}[M], \; [c] = [T]^{-1}[L], [E] = [T]^{-2}[L]^{2}[M]$$

Θέλουμε να αντιστρέψουμε αυτές τις σχέσεις, αν αυτό μπορεί να γίνει. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε τις:

$$[T]=[\hbar]^{\alpha_1}[c]^{\alpha_2}[E]^{\alpha_3},\ [L]=[\hbar]^{\beta_1}[c]^{\beta_2}[E]^{\beta_3},\ [M]=[\hbar]^{\gamma_1}[c]^{\gamma_2}[E]^{\gamma_3}$$

Χρειάζεται να προσδιοριστούν, αν είναι δυνατόν, τα α,β,γ. Αντικαθιστούμε στις τελευταίες τις μονάδες που αντιστοιχούν στις σταθερές και στην ενέργεια, οπότε βρίσκουμε από την πρώτη:

$$[T]=\left([T]^{-1}[L]^2[M]\right)^{\alpha_1}\left([T]^{-1}[L]\right)^{\alpha_2}\left([T]^{-2}[L]^2[M]\right)^{\alpha_3}$$

Η ομογένεια οδηγεί στις σχέσεις:

$$\begin{aligned}1&=-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3\\0&=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\\0&=\alpha_1+\alpha_3\end{aligned}$$

Αυτές έχουν μοναδική λύση που είναι:

$$\alpha_1=1,\alpha_2=0,\alpha_3=-1$$

Επομένως:

$$[T]=[\hbar][E]^{-1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε από τη δεύτερη:

$$[L]=\left([T]^{-1}[L]^2[M]\right)^{\beta_1}\left([T]^{-1}[L]\right)^{\beta_2}\left([T]^{-2}[L]^2[M]\right)^{\beta_3}$$

Από την ομογένεια καταλήγουμε στις:

$$\begin{aligned}0&=-\beta_1-\beta_2-2\beta_3\\1&=2\beta_1+\beta_2+2\beta_3\\0&=\beta_1+\beta_3\end{aligned}$$

Υπάρχει μοναδική λύση η:

$$\beta_1=1,\beta_2=1,\beta_3=-1$$

Οπότε:

$$[L]=[\hbar][c][E]^{-1}.$$

Τέλος από την τρίτη έχουμε:

$$[M]=\left([T]^{-1}[L]^2[M]\right)^{\gamma_1}\left([T]^{-1}[L]\right)^{\gamma_2}\left([T]^{-2}[L]^2[M]\right)^{\gamma_3}$$

Καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned}0&=-\gamma_1-\gamma_2-2\gamma_3\\0&=2\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3\\1&=\gamma_1+\gamma_3\end{aligned}$$

Η μοναδική λύση τους δίνει:

$$\gamma_1=0,\gamma_2=-2,\gamma_3=1$$

Επομένως:

$$[M]=[c]^{-2}[E].$$

Γράφουμε τις σχέσεις που βρήκαμε όλες μαζί:

$$[T]=[\hbar][E]^{-1}$$
$$[L]=[\hbar][c][E]^{-1}$$
$$[M]=[c]^{-2}[E]$$

Είπαμε και προηγουμένως ότι στα συστήματα CGS,

$$[T]=\mathrm{s},\ [L]=\mathrm{cm},\ [M]=\mathrm{g},[E]=\mathrm{erg}.$$

Στο SI,

$$[T]=\mathrm{s},\ [L]=\mathrm{m},\ [M]=\mathrm{kg},[E]=\mathrm{J}.$$

Φτιάχνουμε το Φυσικό Σύστημα Μονάδων, παίρνοντας αρχικά ως μονάδες της στροφορμής, της ταχύτητας και της ενέργειας τις $[\hbar]=\hbar=1,[c]=c=1,[E]=\mathrm{erg}$ ή $[E]=\mathrm{J}$. Όπως είπαμε και προηγουμένως, τελικώς θα πάρουμε ως μονάδα της ενέργειας το GeV, που είναι πολλαπλάσιο των σύμφωνων μονάδων erg και joule στα συστήματα CGS και SI αντιστοίχως. Στο Φυσικό Σύστημα θα έχουμε αρχικά τις μονάδες (ο συμβολισμός είναι προφανής):

$$[T_{\mathrm{n}}]=[E]^{-1}=\mathrm{erg}^{-1}\ \text{ή}\ \ \mathrm{J}^{-1}$$
$$[L_{\mathrm{n}}]=[E]^{-1}=\mathrm{erg}^{-1}\ \text{ή}\ \ \mathrm{J}^{-1}$$
$$[M_{\mathrm{n}}]=[E]=\mathrm{erg}\quad \text{ή}\ \ \mathrm{J}$$

Είναι ευνόητο ότι και οι παράγωγες Φυσικές Μονάδες όλων των μεγεθών εκφράζονται συναρτήσει της μονάδας ενέργειας $[E]$. Επίσης είναι σαφές ότι οι διαστάσεις των παράγωγων φυσικών μεγεθών εκφράζονται ως δυνάμεις μίας διάστασης, της διάστασης της ενέργειας.

Ας δούμε τι γίνεται με τη μονάδα για το παράγωγο μέγεθος, την ταχύτητα,

$$\upsilon=\frac{l}{t},\ \text{ επομένως }\ [\upsilon]=\frac{[E]^{-1}}{[E]^{-1}}=1\ \text{(χωρίς διαστάσεις,}$$

η μονάδα της ταχύτητας είναι ίση με 1)

Είναι σαφές ότι αυτό συμφωνεί με το γεγονός που ξέρουμε ήδη, δηλαδή η μονάδα ταχύτητας είναι $[c]=c=1$, αδιάστατο μέγεθος. Για τη μη σχετικιστική ορμή ισχύει:

$$p=m\upsilon,$$

επομένως

$$[p]=[m][\upsilon]=[E].$$

Ας δούμε τι γίνεται με την επιτάχυνση. Έχουμε:

$$a=\frac{\upsilon}{t},\ \text{ άρα }\ [a]=[t]^{-1}=[E].$$

Για τη δύναμη έχουμε:

$$F=ma,\ \text{ οπότε }\ [F]=[m][a]=[E]^{2}.$$

Τώρα αξίζει να αναφερθούμε στη μονάδα φορτίου στο Φυσικό Σύστημα που προκύπτει από το H-L. Ο νόμος του Coulomb για δύο ίσα φορτία γράφεται ως:

$$F=\frac{q^{2}}{4\pi r^{2}},$$

επομένως

$$\left[F\right]=\frac{\left[q\right]^2}{\left[4\pi\right]\left[r\right]^2}=\frac{\left[q\right]^2}{1\times\left[r\right]^2}\ \text{ άρα }\ \left[q\right]^2=\left[F\right]\left[r\right]^2$$

Στο Φυσικό Σύστημα θα έχουμε $\left[q\right]^2=\left[E\right]^2\left[E\right]^{-2}=1,\ \left[q\right]=1$, δηλαδή το φορτίο είναι αδιάστατο μέγεθος, η μονάδα φορτίου στο Φυσικό Σύστημα είναι ίση με 1, $\left[q\right]=1$.

Πριν προχωρήσουμε θα βρούμε πώς σχετίζονται οι θεμελιώδεις μονάδες των συνήθων συστημάτων μονάδων με τις μονάδες τους στο φυσικό σύστημα όπου είναι δυνάμεις του $\left[E\right]$. Έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&\hbar=1{,}054\ 571\ 817\times10^{-27}\ \mathrm{erg\,s}\\
&\hbar=1{,}054\ 571\ 817\times10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\\
&c=2{,}997\ 924\ 58\times10^{10}\ \mathrm{cm\,s^{-1}}\\
&c=2{,}997\ 924\ 58\times10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}\\
&\mathrm{erg}=\mathrm{g\,cm^2\,s^{-2}}=6{,}241\ 506\times10^{2}\ \mathrm{GeV}\\
&\mathrm{GeV}=1{,}602\ 18\times10^{-3}\ \mathrm{erg}\\
&\mathrm{J}=10^{7}\ \mathrm{erg}
\end{aligned}$$

Μερικές τιμές είναι κατά προσέγγιση. Στην πράξη, σε συνήθη προβλήματα, κρατούμε μικρότερο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, έχουμε στο CGS

$$1\ \mathrm{s}=\frac{\hbar}{\left\{\hbar\right\}_{\mathrm{CGS}}}\mathrm{erg}^{-1},\ 1\mathrm{cm}=\frac{\hbar}{\left\{\hbar\right\}_{\mathrm{CGS}}}\frac{c}{\left\{c\right\}_{\mathrm{CGS}}}\mathrm{erg}^{-1},\ 1\ \mathrm{g}=\frac{c^{-2}}{\left\{c\right\}_{\mathrm{CGS}}^{-2}}\mathrm{erg}$$

Αν θέσομε $\hbar=1, c=1$, τότε (είναι καλύτερα να μην χρησιμοποιούμε ισότητες, παρόλο που και αυτό γίνεται) έχουμε τις ισοδυναμίες (αντιστοιχίες):

$$\begin{aligned}
&1\ \mathrm{s}\Leftrightarrow\frac{1}{\left\{\hbar\right\}_{\mathrm{CGS}}}\mathrm{erg}^{-1}=9{,}483\times10^{26}\ \mathrm{erg}^{-1}=1{,}519\times10^{24}\ \mathrm{GeV}^{-1}\\
&1\ \mathrm{cm}\Leftrightarrow\frac{1}{\left\{\hbar\right\}_{\mathrm{CGS}}}\frac{1}{\left\{c\right\}_{\mathrm{CGS}}}\mathrm{erg}^{-1}=3{,}163\times10^{16}\mathrm{erg}^{-1}=5{,}068\times10^{13}\ \mathrm{GeV}^{-1}\\
&1\ \mathrm{g}\Leftrightarrow\left\{c\right\}_{\mathrm{CGS}}^{2}\mathrm{erg}=8{,}988\times10^{20}\mathrm{erg}=5{,}610\times10^{23}\ \mathrm{GeV}
\end{aligned}$$

Ισχύει $\mathrm{J}=\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$. Εύκολα βρίσκονται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&1\ \mathrm{s}\Leftrightarrow9{,}483\times10^{33}\ \mathrm{J}^{-1}\\
&1\ \mathrm{m}\Leftrightarrow3{,}163\times10^{25}\ \mathrm{J}^{-1}\\
&1\ \mathrm{kg}\Leftrightarrow8{,}988\times10^{16}\ \mathrm{J}
\end{aligned}$$

Ας δούμε την αντιστοιχία μεταξύ της μονάδας coulomb και της παραπάνω μονάδας φορτίου του φυσικού συστήματος H-L. Μπορούμε να κάνουμε τους εξής συλλογισμούς: Έστω ότι φορτίο 1 C βρίσκεται σε απόσταση 1 cm από ίσο φορτίο, η μεταξύ τους δύναμη έχει τιμή:

$$F=\frac{10^4}{4\pi\left\{\varepsilon_0\right\}_{\mathrm{SI}}}\mathrm{N}.$$

Στο Φυσικό Σύστημα (H-L) θα έχουμε:

$$F_{\mathrm{n}}=\frac{q_{\mathrm{n}}^2}{4\pi r_{\mathrm{n}}^2}$$

Με χρήση και των παραπάνω ισοδυναμιών έχουμε:

$$1\ \mathrm{N}=1\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}\ \text{επομένως}\ 1\ \mathrm{N}\Leftrightarrow\left(5{,}610\times10^{26}\ \mathrm{GeV}\right)$$

$$\times\left(5{,}068\times10^{15}\ \mathrm{GeV^{-1}}\right)\times\left(1{,}519\times10^{24}\ \mathrm{GeV^{-1}}\right)^{-2}$$

$$1\ \mathrm{N}\Leftrightarrow1{,}232\times10^{-6}\ \mathrm{GeV^2}$$

$$1\ \mathrm{cm}\Leftrightarrow5{,}068\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}$$

Σωστά βρήκαμε πως το 1 N, ως δύναμη, στο Φυσικό Σύστημα δίνεται σε GeV^2.
Ισχύει

$$\varepsilon_0=8{,}854\ 187\times10^{-12}\ \mathrm{s^4\,m^{-3}kg^{-1}A^2}\ .$$

Η δύναμη των $\dfrac{10^4}{4\pi\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}}$ N με την οποία αλληλεπιδρούν τα δύο ίσα φορτία του 1 C σε μεταξύ τους απόσταση 1 cm, στο φυσικό σύστημα είναι ίση με:

$$F_{\mathrm{n}}=\frac{10^4}{4\pi\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}}\times1{,}232\times10^{-6}\mathrm{GeV^2}=\left(\frac{10^4\times1{,}232\times10^{-6}}{4\pi\times8{,}854\ 187\times10^{-12}}\right)\mathrm{GeV^2}$$

$$=\frac{1{,}391\ 432}{4\pi}\times10^9\ \mathrm{GeV^2}$$

Το $r=1\ \mathrm{cm}$ άρα $r_{\mathrm{n}}=5{,}068\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}$. Προχωρούμε όπως παρακάτω και βρίσκουμε το ισοδύναμο φορτίο του 1 C, σε φυσικές μονάδες φορτίου, έστω ΦΜΦ:

$$q_{\mathrm{n}}^2=4\pi r_{\mathrm{n}}^2F_{\mathrm{n}}\ \text{ ή }\ q_{\mathrm{n}}=r_{\mathrm{n}}\sqrt{4\pi F_{\mathrm{n}}}$$

$$1\ \mathrm{C}\Leftrightarrow5{,}068\times10^{13}\sqrt{1{,}391\ 432\times10^9}\ \text{ΦΜΦ}$$

$$=1{,}890\times10^{18}\ \text{ΦΜΦ}$$

Ο συμβολισμός ΦΜΦ δεν χρησιμοποιείται, απλώς το χρησιμοποιήσαμε μόνο εδώ για καλύτερη κατανόηση. Ας δούμε, για παράδειγμα, το στοιχειώδες φορτίο. Έχουμε:

$$e=1{,}602\ 177\times10^{-19}\ \mathrm{C}\Leftrightarrow1{,}602\ 177\times10^{-19}\times1{,}890\times10^{18}$$

$$=0{,}3028\ \text{ καθαρός αριθμός}$$

Χρησιμοποιούμε τις παραπάνω σχέσεις ισοδυναμιών και αντιστρέφοντας βρίσκουμε τις παρακάτω αντιστοιχίες για τα συστήματα CGS με την ενέργεια σε GeV.

$$1\ \text{φυσική μονάδα χρόνου}=1\ \mathrm{GeV^{-1}}\Leftrightarrow6{,}583\times10^{-25}\ \mathrm{s}$$

$$1\ \text{φυσική μονάδα μήκους}=1\ \mathrm{GeV^{-1}}\Leftrightarrow1{,}973\times10^{-14}\ \mathrm{cm}$$

$$1\ \text{φυσική μονάδα μάζας}=1\ \mathrm{GeV}\Leftrightarrow1{,}783\times10^{-24}\ \mathrm{g}$$

Αν η ενέργεια είναι σε erg, έχουμε στα CGS:

$$1\ \text{φυσική μονάδα χρόνου}=1\ \mathrm{erg^{-1}}\Leftrightarrow1{,}055\times10^{-27}\ \mathrm{s}$$

$$1\ \text{φυσική μονάδα μήκους}=1\ \mathrm{erg^{-1}}\Leftrightarrow3{,}162\times10^{-17}\ \mathrm{cm}$$

$$1\ \text{φυσική μονάδα μάζας}=1\ \mathrm{erg}\Leftrightarrow1{,}113\times10^{-21}\ \mathrm{g}$$

Για το φυσικό σύστημα μηχανικών μονάδων του SI έχουμε αντιστοίχως:

$$1 \text{ φυσική μονάδα χρόνου} = 1\ \text{GeV}^{-1} \Leftrightarrow 6{,}583\times10^{-25}\ \text{s}$$
$$1 \text{ φυσική μονάδα μήκους} = 1\ \text{GeV}^{-1} \Leftrightarrow 1{,}973\times10^{-16}\ \text{m}$$
$$1 \text{ φυσική μονάδα μάζας} = 1\ \text{GeV} \Leftrightarrow 1{,}783\times10^{-27}\ \text{kg}$$
$$1 \text{ φυσική μονάδα χρόνου} = 1\ \text{J}^{-1} \Leftrightarrow 1{,}055\times10^{-34}\ \text{s}$$
$$1 \text{ φυσική μονάδα μήκους} = 1\ \text{J}^{-1} \Leftrightarrow 3{,}162\times10^{-26}\ \text{m}$$
$$1 \text{ φυσική μονάδα μάζας} = 1\ \text{J} \Leftrightarrow 1{,}113\times10^{-17}\ \text{kg}$$

Ας δούμε στη συνέχεια πώς μπορούμε στην πράξη να μετατρέψουμε ένα φυσικό μέγεθος από το φυσικό σύστημα τύπου CGS (όπως είναι το τύπου H-L), σύμβολο A_{n} στο σύνηθες σύστημα, CGS, σύμβολο A και αντιστρόφως. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε πώς το μέγεθος στο αρχικό σύστημα μονάδων να μετατραπεί σε μέγεθος που να μετριέται σε μονάδες ενέργειας. Ας ξεκινήσουμε με τα θεμελιώδη μηχανικά μεγέθη, η ενέργεια θα μετριέται σε erg.
Για τον χρόνο έχουμε

$$t = \left(\frac{t}{\hbar^{\alpha} c^{\beta}}\right)\hbar^{\alpha} c^{\beta}$$

ψάχνουμε για α, β τέτοια που η παρένθεση να έχει διαστάσεις ενέργειας σε κάποια δύναμη. Διαστατική ανάλυση οδηγεί προφανώς στις τιμές $\alpha=1, \beta=0$. Άρ $t = \left(\frac{t}{\hbar}\right)\hbar\alpha$, θέτουμε $\hbar=1$, οπότε έχουμε την ισοδυναμία

$$t_n = \frac{t}{\hbar} \Leftrightarrow t.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε για το μήκος:

$$l_{\text{n}} = \frac{l}{\hbar c} \Leftrightarrow l$$

Για τη μάζα έχουμε:

$$m_{\text{n}} = \frac{m}{c^{-2}} = mc^2 \Leftrightarrow m$$

Για το εμβαδόν, τον όγκο, την ταχύτητα, την επιτάχυνση και την ενέργεια έχουμε αντιστοίχως:

$$S_{\text{n}} = \frac{S}{\hbar^2 c^2} \quad S_{\text{n}} \Leftrightarrow S, V_{\text{n}} = \frac{V}{\hbar^3 c^3} \quad V_{\text{n}} \Leftrightarrow V, \upsilon_{\text{n}} = \frac{l}{\hbar c} / \frac{t}{\hbar} = \upsilon / c \quad \upsilon_{\text{n}} \Leftrightarrow \upsilon$$
$$a_{\text{n}} = (\upsilon / c) / (t/\hbar) = \frac{a}{\hbar^{-1} c} \quad a_{\text{n}} \Leftrightarrow a, E_{\text{n}} = E$$

Είναι αναμενόμενες κατά κάποιο τρόπο αυτές οι αντιστοιχίες, διότι οδηγούν στις σωστές διαστάσεις στο φυσικό σύστημα μονάδων. Είναι ευνόητο πως ισχύουν και οι αντίστροφες αντιστοιχίες:

$$S = S_{\text{n}}\hbar^2 c^2, \ V = V_{\text{n}}\hbar^3 c^3, \quad \upsilon = \upsilon_{\text{n}} c$$
$$a = (\upsilon / c) / (t/\hbar) = a_{\text{n}}\hbar^{-1} c, \quad E = E_{\text{n}}$$

Ανάλογα ισχύουν και για τις μηχανικές ποσότητες του SI. Είναι εύκολο να καταλάβουμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια σε GeV.

Τα παραπάνω οδηγούν στην παρακάτω «συνταγή» εύρεσης των αντιστοιχίσεων, μεταξύ των δύο συστημάτων:
Γράφουμε τη σχέση:

$$A_{\text{n}} = \frac{A}{\hbar^{\alpha} c^{\beta}}$$

και ψάχνουμε να βρούμε εκθέτες α, β και a έτσι που το πηλίκο να έχει τη διάσταση του μεγέθους E^a, όπου το E σημαίνει ενέργεια κατά τη διαστατική ανάλυση, για ευκολία στον συμβολισμό γράφουμε τις σχέσεις για τις μονάδες μέτρησης. Ας δούμε την περίπτωση της ορμής: Γράφουμε

$$p_{\mathrm{n}} = \frac{p}{\hbar^{\alpha} c^{\beta}} .$$

Για τις μονάδες έχουμε

$$\left[p_{\mathrm{n}}\right] = \frac{[p]}{[\hbar]^{\alpha}[c]^{\beta}} = [E]^{a} .$$

Με διαστατική ανάλυση βρίσκουμε $a = 1, \alpha = 0, \beta = -1$, επομένως $\left[p_{\mathrm{n}}\right] = [E]$, $p_{\mathrm{n}} = pc$. Είναι εύκολο να βρείτε το αυτονόητο που ήδη ξέρουμε από τα προηγούμενα για την ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{n}} = \upsilon / c$ και $\left[\upsilon_{\mathrm{n}}\right] = 1$. Επίσης, εύκολα συμπεραίνουμε πως $c_{\mathrm{n}} = 1, \hbar_{\mathrm{n}} = 1$ όπως αναμένεται «εξ ορισμού». Για να ανακτήσουμε τις σταθερές που θέσαμε ίσες με 1, ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία. Πολλαπλασιάζουμε τα μεγέθη του φυσικού συστήματος επί $\hbar^{\alpha} c^{\beta}$ και ψάχνουμε να βρούμε τους εκθέτες έτσι ώστε το φυσικό μέγεθος να αποκτήσει τις διαστάσεις του στο αρχικό (σύνηθες) σύστημα. Δηλαδή γράφουμε:

$$A = A_{\mathrm{n}} \hbar^{\alpha} c^{\beta} \quad \text{και} \quad [A] = \left[A_{\mathrm{n}}\right][\hbar]^{\alpha}[c]^{\beta}$$

Ας δούμε την περίπτωση της ορμής. Προφανώς βρίσκουμε $a = 1, \alpha = 0, \beta = -1$.

Οπότε, $p = p_{\mathrm{n}} / c$, πράγμα αναμενόμενο. Για τη μάζα $m = m_{\mathrm{n}} / c^2$.

Ας δούμε ΠΟΛΥ σχολαστικά την περίπτωση της σχετικιστικής ενέργειας: Έχουμε τη γνωστή σχέση σε μονάδες CGS

$$E = \sqrt{(pc)^2 + \left(mc^2\right)^2} .$$

Θα τη μετατρέψουμε σε σχέση μεταξύ μεγεθών του φυσικού συστήματος. Στη θέση των E, p, m, c βάζουμε τα $E_{\mathrm{n}} = E, p_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{n}}, 1$, οπότε καταλήγουμε στην $E_{\mathrm{n}} = \sqrt{p_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{n}}^2}$. Τώρα όλα μετριούνται σε erg. Στην πράξη δεν χρησιμοποιούμε σύμβολα με δείκτες n, αλλά γράφουμε απλά,

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} .$$

Η σχέση ισχύει η ίδια αν τα μεγέθη μετριούνται σε GeV. Συνηθίζεται να λέμε πως η ορμή p μετριέται σε GeV/*c* και η μάζα m σε GeV/c^2 και να χρησιμοποιείται η σχέση που ισχύει στο αρχικό σύστημα. Στην περιοχή των στοιχειωδών σωματιδίων είναι βολικό οι ενέργειες, οι μάζες και οι ορμές των σωματιδίων να μετριούνται σε MeV ή GeV, ή και MeV/c^2 ή GeV/c^2, MeV/*c* ή GeV/*c* αντιστοίχως. Οι μονάδες με το GeV είναι οι επικρατέστερες, διότι οι μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου έχουν περίπου αριθμητικές τιμές 1 σε αυτές τις φυσικές μονάδες.

Ένας άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα είναι στη σχέση

$$E = \sqrt{(pc)^2 + \left(mc^2\right)^2} \quad \text{να θέσομε} \; p_{\mathrm{n}} = pc, \; m_{\mathrm{n}} = mc^2 ,$$

οπότε καταλήγουμε και πάλι στη ζητούμενη σχέση.

Άλλος τρόπος, ο πλέον σχολαστικός, είναι να γράψουμε την αρχική στη μορφή:

$$E = \sqrt{\left(\frac{pc}{c}\frac{cc}{c}\right)^2 + \left(\frac{mc^2}{c^2}\frac{(cc)^2}{cc}\right)^2} = \sqrt{p_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{n}}^2}$$

$$\text{αφού} \; pc = p_n, \; mc^2 = m_{\mathrm{n}}, \; c = c_{\mathrm{n}} c = 1 \times c$$

Στη συνέχεια ας δούμε τη σχέση για τη σταθερά λεπτής υφής. Στο H-L αυτή η σχέση είναι:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}.$$

Το α είναι αδιάστατη σταθερά και σε όλα τα συστήματα μονάδων έχει την ίδια τιμή. Στο φυσικό σύστημα H-L η σχέση γράφεται:

$$\alpha = \frac{e_{\mathrm{n}}^2}{4\pi}$$

Για το στοιχειώδες φορτίο στο σύστημα αυτό, όπως είδαμε, έχουμε $e_{\mathrm{n}} = 0{,}3028$, οπότε βρίσκουμε το γνωστό αποτέλεσμα:

$$\alpha = \frac{(0{,}3028)^2}{4\pi} = 7{,}296 \times 10^{-3} = \frac{1}{137{,}06}$$

Μπορεί κάποιος να γράψει ότι $e_{\mathrm{n}} = \sqrt{4\pi\alpha}$.

Στη συνέχεια ας δούμε πώς από τη σχέση $\alpha = \frac{e_{\mathrm{n}}^2}{4\pi}$ μπορούμε να βρούμε τη σχέση στο H-L. Η ιδέα είναι στη θέση του e_{n}^2 να θέσουμε τα α, β τέτοια ώστε αυτό το πηλίκο να είναι αδιάστατο. Με διαστατική ανάλυση βρίσκουμε πως $\alpha = 1, \beta = 1$, οπότε πράγματι βρίσκουμε την αρχική σχέση:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}.$$

Τέλος, θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που δεν υπάρχουν οι σταθερές $\hbar, c$ στην εξίσωση. Σε τέτοια περίπτωση, η χρήση του φυσικού συστήματος μονάδων δεν βοηθά, δεν γίνεται κάποια απλοποίηση των εξισώσεων. Ας γράψουμε την εξίσωση για την ελεύθερη πτώση μέσα στο πεδίο βαρύτητας κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε:

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Γράφουμε:

$$\frac{s}{\hbar c} = \frac{1}{2}\frac{g t^2}{\hbar c} = \frac{1}{2}\frac{g}{\hbar^{-1} c}\left(\frac{t}{\hbar}\right)^2$$

Με χρήση των προηγούμενων βρίσκουμε:

$$s_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2} g_{\mathrm{n}} t_{\mathrm{n}}^2$$

Δεν πετύχαμε καμιά απλοποίηση της σχέσης, απλώς δυσκολέψαμε τα πράγματα, αφού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις περίεργες μονάδες, που είναι δυνάμεις της μονάδας ενέργειας, όπως το erg. Στο τέλος, φυσικά μετά από τους υπολογισμούς σε συγκεκριμένο πρόβλημα, θα χρειαστεί να βρούμε το αποτέλεσμα σε συνήθεις μονάδες μήκους, π.χ. cm.

Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε την αρχική κάνοντας την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί $\hbar c$, έτσι ώστε να μετατρέψουμε τα μεγέθη ώστε να μετριούνται στις συνήθεις μονάδες τους, δηλαδή να έχουν τις συνήθεις διαστάσεις τους.

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στο σύστημα SI για την περιοχή της Μηχανικής και του Ηλεκτρομαγνητισμού. Τα θεμελιώδη μεγέθη είναι ο χρόνος, το μήκος, η μάζα και το ρεύμα. Οι θεμελιώδεις μονάδες τους είναι τα $\mathrm{s}, \mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{A}$. Το αντίστοιχο φυσικό σύστημα στηρίζεται στις σταθερές $\hbar, c, \varepsilon_0, E$. Η ενέργεια μπορεί να μετριέται σε J ή σε άλλες μονάδες, όπως και το GeV. Όπως και στα προηγούμενα, πρέπει αυτά τα μεγέθη να αποτελούν πλήρες σύστημα, δηλαδή να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει οι θεμελιώδεις μονάδες του SI να μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα ως προς τις μονάδες του φυσικού συστήματος και να γίνεται και το αντίστροφο. Θα δείξουμε πως αυτό πράγματι γίνεται για αυτήν την περίπτωση. Έχουμε:

$$[\hbar]=[T]^{-1}[L]^{2}[M],\ [c]=[T]^{-1}[L],[\varepsilon_0]=[T]^{4}[L]^{-3}[M]^{-1}[I]^{2}$$
$$[E]=[T]^{-2}[L]^{2}[M]$$

Θα πρέπει να μπορούν οι συνήθεις μονάδες να εκφραστούν συναρτήσει των φυσικών μονάδων. Θα ακολουθήσουμε τον μη ορθόδοξο (συμβολικό) τρόπο. Παίρνουμε τους φυσικούς λογάριθμους των παραπάνω σχέσεων και βρίσκουμε:

$$\ln[\hbar]=-1\times\ln[T]+2\times\ln[L]+1\times\ln[M],\ \ln[c]=-1\times\ln[T]+1\times\ln[L]$$
$$\ln[\varepsilon_0]=4\times\ln[T]-3\times\ln[L]-1\times\ln[M]+2\times\ln[I]$$
$$\ln[E]=-2\times\ln[T]+2\times\ln[L]+1\times\ln[M]$$

Αυτές γράφονται σε μορφή με μήτρες (πίνακες):

$$\begin{pmatrix}\ln[\hbar]\\ \ln[c]\\ \ln[\varepsilon_0]\\ \ln[E]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln[T]\\ \ln[L]\\ \ln[M]\\ \ln[I]\end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα της μήτρας είναι μη μηδενική, είναι ίση με -2, επομένως με αντιστροφή βρίσκουμε τις συνήθεις μονάδες συναρτήσει των φυσικών μονάδων, δηλαδή έχουμε:

$$\begin{pmatrix}\ln[T]\\ \ln[L]\\ \ln[M]\\ \ln[I]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln[\hbar]\\ \ln[c]\\ \ln[\varepsilon_0]\\ \ln[E]\end{pmatrix}$$

Τελικώς έχουμε τις «σωστές» αντεστραμμένες σχέσεις:

$$[T]=[\hbar][E]^{-1},\ [L]=[\hbar][c][E]^{-1},\ [M]=[c]^{-2}[E],\ [I]=[\hbar]^{-\frac{1}{2}}[c]^{\frac{1}{2}}[\varepsilon_0]^{\frac{1}{2}}[E]$$

Είναι προφανές πως ό,τι έχουμε πει για τα μηχανικά μεγέθη και τις μηχανικές μονάδες των φυσικών συστημάτων τύπου CGS, ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση του φυσικού συστήματος που προκύπτει από το SI και τις μονάδες του. Η διαφορά υπάρχει στα μεγέθη και στις μονάδες του Ηλεκτρομαγνητισμού. Τώρα οι σταθερές είναι οι $\hbar, c, \varepsilon_0$ και στο αντίστοιχο φυσικό σύστημα όλα τα μεγέθη, όπως και πριν, έχουν διάσταση ενέργειας σε κάποια δύναμη. Ας δούμε τι γίνεται με τη μονάδα ρεύματος, το ampere (A). Από την τελευταία σχέση έχουμε, με μονάδα ενέργειας το J:

$$1\ \mathrm{A}=\frac{\{\hbar\}_{\mathrm{SI}}^{1/2}}{\{c\}_{\mathrm{SI}}^{1/2}\{\varepsilon_0\}_{\mathrm{SI}}^{1/2}}\frac{c^{1/2}\varepsilon_0^{1/2}}{\hbar^{1/2}}\,\mathrm{J}=\frac{\left(1{,}054\ 572\times10^{-34}\right)^{1/2}}{\left(2{,}997\,925\times10^{8}\right)^{1/2}\times\left(8{,}854\ 187\times10^{-12}\right)^{1/2}}\frac{c^{1/2}\varepsilon_0^{1/2}}{\hbar^{1/2}}\,\mathrm{J}$$
$$=\left(1{,}9932\times10^{-16}\right)\frac{c^{1/2}\varepsilon_0^{1/2}}{\hbar^{1/2}}\,\mathrm{J}$$

Για να καταλήξουμε στις μονάδες του φυσικού συστήματος τύπου SI, θέτουμε $\hbar=1,\ c=1,\ \varepsilon_0=1$ και έχουμε την αντιστοιχία:

$$1\ \mathrm{A} \Leftrightarrow 1{,}9932\times 10^{-16}\ \mathrm{J} = 1{,}9932\times 10^{-16}\times 6{,}241\,506\times 10^{9}\ \mathrm{GeV}$$
$$1\ \mathrm{A} \Leftrightarrow 1{,}2441\times 10^{-6}\ \mathrm{GeV}$$

Για το φορτίο βρίσκουμε:

$$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A}\times 1\ \mathrm{s} = \left(1{,}2441\times 10^{-6}\ \mathrm{GeV}\right)\times\left(1{,}519\times 10^{24}\ \mathrm{GeV}^{-1}\right) = 1{,}890\times 10^{18}$$

Το φορτίο είναι καθαρός αριθμός, δεν έχει διαστάσεις. Έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τη μονάδα ενέργειας, οπότε έχει την ίδια τιμή που βρήκαμε με την προηγούμενη ανάλυσή μας.

Ο νόμος του Coulomb στο SI είναι:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Από αυτήν βρίσκουμε:

$$\frac{F}{\hbar^{\alpha} c^{\beta} \varepsilon_0^{\gamma}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{1}{\hbar^{\alpha} c^{\beta} \varepsilon_0^{\gamma}}\ .$$

Μπορούμε να δείξουμε με διαστατική ανάλυση ότι οι εκθέτες που οδηγούν σε διάσταση του πρώτου μέλους ίδια με διάσταση ενέργειας σε κάποια δύναμη είναι, $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 0$ και η διάσταση είναι διάσταση της έκφρασης E^2, πράγμα που ξέρουμε ήδη. Γράφουμε επομένως:

$$\frac{F}{\hbar^{-1} c^{-1}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{1}{\hbar^{-1} c^{-1} \varepsilon_0^{0}} = \frac{\left(q_1 / \sqrt{\varepsilon_0 \hbar c}\right)\left(q_2 / \sqrt{\varepsilon_0 \hbar c}\right)}{4\pi\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{r}{\hbar c}\right)^2}$$

Αυτή η επιλογή οδηγεί στην εξίσωση στο φυσικό σύστημα:

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_{1\mathrm{n}} q_{2\mathrm{n}}}{r_{\mathrm{n}}^2}\ .$$

Στις ομογενείς σχέσεις που είναι οι σχέσεις της Φυσικής, πάντοτε μπορούμε να θέσουμε απλά στην αρχική σχέση $\hbar = 1, c = 1, \varepsilon_0 = 1$ και να θεωρήσουμε για όλα τα μεγέθη ότι είναι τα μεγέθη του φυσικού συστήματος. Από την τελευταία σχέση για τον νόμο του Coulomb, με την αντίστροφη διαδικασία καταλήγουμε στη συνήθη σχέση. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε διαδικασία σας βολεύει στις μετατροπές.

Ας δούμε ξανά το θέμα με την αδιάστατη σταθερά λεπτής υφής. Η σχέση στο SI είναι:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c\varepsilon_0}$$

Στο φυσικό σύστημα του SI ισχύει:

$$\alpha = \frac{e_{\mathrm{n}}^2}{4\pi}$$

Η σχέση είναι ίδια με αυτή που προκύπτει από το σύστημα H-L. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι και τα δύο συστήματα είναι ορθολογισμένα, οπότε οι σχέσεις στα φυσικά συστήματά τους, όπου $\hbar = 1, c = 1, \varepsilon_0 = 1$ είναι ακριβώς οι ίδιες. Οι εξισώσεις του Maxwell έχουν επίσης την απλούστερη μορφή τους, χωρίς καμιά σταθερά. Με την απαίτηση τα διάφορα μεγέθη που εισέρχονται στη σχέση για τη σταθερά λεπτής υφής να έχουν τις σωστές τους διαστάσεις (στο SI), βρίσκουμε τη σχέση στο σύστημα SI.

Η μέτρηση των διάφορων μεγεθών σε μονάδες ενέργειας ίσως μας ξενίζει κάπως, όμως ας θυμηθούμε πως μερικές φορές μετρούμε την απόσταση με μονάδα τον χρόνο, λέμε «μία ώρα δρόμος» και εννοούμε την απόσταση που διανύει περπατώντας ένας άνθρωπος σε μία ώρα. Υποτίθεται ότι ο ρυθμός βαδίσματος είναι μια «σταθερά», 5 χιλιόμετρα την ώρα, επομένως μία ώρα δρόμος είναι 5 χιλιόμετρα. Επίσης, για το μήκος χρησιμοποιείται μονάδα που στηρίζεται στον ρυθμό καπνίσματος και στον ρυθμό βαδίσματος, λέμε «ένα τσιγάρο δρόμος» και εννοούμε το μήκος που διανύει ο άνθρωπος βαδίζοντας και καπνίζοντας μέχρι να τελειώσει το κάπνισμα τσιγάρου. Υποτίθεται πως ο ρυθμός καπνίσματος είναι μια σταθερά, 1 τσιγάρο ανά 12 πρώτα λεπτά. Με χρήση και του ρυθμού βαδίσματος, συμπεραίνουμε πως 1 τσιγάρο δρόμος είναι 1 χιλιόμετρο. Δηλαδή τίποτα το παράξενο με τη χρήση της ενέργειας για μέτρηση χρόνου, μήκους κτλ.

1.5.3 Αδιάστατες εξισώσεις

Στη συνέχεια θα πούμε δύο λόγια για τη χρήση εξισώσεων της Φυσικής, όπου μπορεί τα μεγέθη μεταβλητές να μετατραπούν σε αδιάστατα μεγέθη και κάποια σταθερά μεγέθη του προβλήματος να μετατραπούν σε αδιάστατα με τιμή 1. Αυτό γενικώς απλοποιεί τους ενδιάμεσους υπολογισμούς (κάτι ανάλογο που είδαμε προηγουμένως με τη χρήση Φυσικών Μονάδων) και οδηγεί στο ότι οι πιθανότητες για σφάλματα ένεκα αβλεψίας να είναι μικρότερες από ό,τι θα ήταν αν χρησιμοποιούνταν οι συνήθεις εξισώσεις στους υπολογισμούς. Εννοείται ότι από τις αδιάστατες εξισώσεις μπορεί να βρεθούν οι συνήθεις εξισώσεις. Παρόλο που αυτό το θέμα θα μπορούσε να βρίσκεται μέσα στο κεφάλαιο της Διαστατικής Ανάλυσης, στο περί αδιάστατων γινομένων κτλ., θεωρήσαμε καλύτερο να αναφερθούμε σε αυτό το θέμα κατά αυτοτελή τρόπο. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που τα θεμελιώδη μεγέθη είναι τρία και οι μονάδες τους είναι τρεις. Μπορεί κάποιος σε αυτήν την περίπτωση να μετατρέψει συνήθεις εξισώσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών σε αδιάστατες, στις οποίες μέχρι και τρεις σταθερές, οι οποίες έχουν μετατραπεί σε αδιάστατες, να ληφθούν ίσες με τη μονάδα, 1.

Θα αρχίσουμε με δύο απλά παραδείγματα και θα προχωρήσομε χωρίς τη χρήση ειδικού θεωρητικού υπόβαθρου, αλλά κάπως εμπειρικά με τις μέχρι τώρα γνώσεις μας. Το πρώτο παράδειγμα είναι η γνωστή εξίσωση Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g z = H$$

Τα p, υ, z είναι οι μεταβλητές ποσότητες του προβλήματος και τα ρ, g, H είναι σταθερές ποσότητες. Η ιδέα είναι να βρούμε με τι πρέπει να διαιρέσουμε τις μεταβλητές ώστε να καταλήξουμε σε αντίστοιχες αδιάστατες μεταβλητές με την απαίτηση οι διαιρέτες να είναι γινόμενα δυνάμεων των σταθερών μεγεθών. Παριστάνουμε τα αδιάστατα μεγέθη με τα σύμβολα των αρχικών με μπαρ από πάνω. Συγκεκριμένα, πρέπει να βρεθούν τα p_c, υ_c, z_c έτσι ώστε

$$p = \overline{p}p_c\,,\; \upsilon = \overline{\upsilon}\upsilon_c\,,\; z = \overline{z}z_c$$

και πρέπει να ισχύουν, $p_c(\text{ή } \upsilon_c)(\text{ή } z_c) = \rho^\alpha g^\beta H^\gamma$. Οι εκθέτες είναι διαφορετικοί για την κάθε περίπτωση. Χρησιμοποιούμε διαστατική ανάλυση. Ας βρούμε τι γίνεται στην περίπτωση της πίεσης:

$$p = \overline{p}p_c = \overline{p}\rho^\alpha g^\beta H^\gamma .$$

Οι διαστάσεις της πίεσης πρέπει να είναι ίδιες με τις διαστάσεις του δεύτερου μέλους.

Από τους ορισμούς των θεμελιωδών και σύμφωνων παράγωγων μονάδων είναι σαφές πως ακολουθούν ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες όπως και οι διαστάσεις τους. Αυτό οδηγεί στο να χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τη σύμφωνη μονάδα παράγωγου μεγέθους και για τη διάστασή της. Αυτό διευκολύνει τους υπολογισμούς αφού έχουμε:

$$\dim\, q := [q]$$

Από τα συμφραζόμενα μπορεί κάποιος να καταλάβει πότε αναφερόμαστε σε μονάδα και πότε σε διάσταση. Επίσης, συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται τέτοιες αγκύλες και με τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών. Για την περίπτωσή μας, η πίεση είναι δύναμη ανά επιφάνεια, επομένως μπορούμε να γράψουμε για τις διαστάσεις:

$$\dim\ p=\left[p\right]=\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}=\left[\mathrm{M}\right]\left[\mathrm{L}\right]^{-1}\left[\mathrm{T}\right]^{-2}=\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right].$$

Η ανωτέρω σταθερή ποσότητα H είναι ενέργεια ανά όγκο (πυκνότητα ενέργειας), οπότε

$$\left[H\right]=\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}=\left[\mathrm{M}\right]\left[\mathrm{L}\right]^{-1}\left[\mathrm{T}\right]^{-2}=\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right].$$

Έτσι βρίσκουμε τη (διαστατική) εξίσωση:

$$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}=\left[\mathrm{ML^{-3}}\right]^{\alpha}\left[\mathrm{LT^{-2}}\right]^{\beta}\left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]^{\gamma}.$$

Η διαστατική ομογένεια δίνει

$$1=\alpha+\gamma,\ -1=-3\alpha+\beta-\gamma,\ -2=-2\beta-2\gamma.$$

Η λύση είναι

$$\alpha=0,\beta=0,\gamma=1.$$

Τελικά:

$$p=\overline{p}p_{\mathrm{c}}=\overline{p}H.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $\upsilon=\overline{\upsilon}\upsilon_{\mathrm{c}}=\overline{\upsilon}\rho^{-1/2}H^{1/2}$, $z=\overline{z}\rho^{-1}g^{-1}H$. Αντικαθιστούμε στην αρχική και έχουμε:

$$\overline{p}p_{\mathrm{c}}+\frac{1}{2}\rho\overline{\upsilon}^{2}\upsilon_{\mathrm{c}}^{2}+\rho g\overline{z}z_{\mathrm{c}}=H\ \text{ ή }\ \overline{p}H+\frac{1}{2}\rho\overline{\upsilon}^{2}\rho^{-1}H+\rho g\overline{z}\rho^{-1}g^{-1}H=H$$

Η αδιάστατη σχέση είναι:

$$\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{\upsilon}^{2}+\overline{z}=1$$

Είναι ευνόητο πως από αυτήν βρίσκουμε την αρχική αντικαθιστώντας τα αδιάστατα μεγέθη συναρτήσει των αρχικών, σύμφωνα με τις σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι η πτώση σωματίου μέσα στο πεδίο βαρύτητας με ευθύγραμμη κίνηση. Τώρα θα ακολουθήσουμε ακόμη πιο απλή διαδικασία. Η (διαφορική) εξίσωση κίνησης είναι η γνωστή:

$$m\frac{d^{2}z}{dt^{2}}=mg\ \text{ ή }\ \frac{d^{2}z}{dt^{2}}=g$$

Θεωρούμε πως η θετική κατεύθυνση είναι προς τα κάτω. Υποθέτουμε πως τη στιγμή $t=0$ το σωμάτιο είναι στη θέση $z=z_{0}$ και έχει (αρχική) ταχύτητα υ_{0}. Η λύση του προβλήματός μας είναι γνωστή,

$$z=z_{0}+\upsilon_{0}t+\frac{1}{2}gt^{2}.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$z_{0}=z(0),\ \upsilon_{0}=\upsilon(0)=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0).$$

Στη συνέχεια θα λύσουμε το πρόβλημα με αδιάστατες εξισώσεις. Θα μετασχηματίσουμε τη (διαφορική) εξίσωση κίνησης και τις αρχικές συνθήκες στις αδιάστατες μορφές τους. Γράφουμε για τις μεταβλητές ποσότητες $t=\tau t_{\mathrm{c}}$, $z=\zeta z_{\mathrm{c}}$. Με απλές διαδικασίες βρίσκουμε:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{z_{\mathrm{c}}}{t_{\mathrm{c}}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau},\ \frac{\mathrm{d}^{2}z}{\mathrm{d}t^{2}}=\frac{z_{\mathrm{c}}}{t_{\mathrm{c}}^{2}}\frac{\mathrm{d}^{2}\zeta}{\mathrm{d}\tau^{2}}$$

Η αρχική (διαφορική) εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{t_c^2}{z_c} g$$

Τα t_c, z_c είναι αυθαίρετα, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για την αδιάστατη ποσότητα ισχύει:

$$\frac{t_c^2}{z_c} g = 1$$

Η εξίσωση κίνησης παίρνει την αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} - 1 = 0$$

Οι αρχικές τιμές είναι:

$$\tau = 0 \text{ που αντιστοιχεί στο } t = 0,\ \zeta_0 = \zeta(0) = z(0)/z_c = z_0/z_c,\ \bar{\upsilon}_0 = \bar{\upsilon}(0) = \upsilon_0 \frac{t_c}{z_c}.$$

Η αδιάστατη λύση είναι:

$$\zeta = \zeta_0 + \bar{\upsilon}_0 \tau + \frac{1}{2}\tau^2$$

Από αυτήν, με την αντίστροφη διαδικασία βρίσκουμε τη λύση της αρχικής (κανονικής) εξίσωσης. Πράγματι με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{z}{z_c} = \frac{z_0}{z_c} + \upsilon_0 \frac{t_c}{z_c}\frac{t}{t_c} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_c}\right)^2$$

Οπότε, εφόσον

$$g = z_c / t_c^2,$$

καταλήγουμε στην αρχική:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g\ .$$

Στη συνέχεια θα ακολουθήσομε μια πιο γενική, πιο αυστηρή διαδικασία, η οποία αποτελεί μια μεθοδική παρουσίαση πραγμάτων που έχουμε ήδη αναφέρει. Η διαδικασία στηρίζεται στη διαστατική ανεξαρτησία και στη διαστατική ομογένεια. Επίσης, εισάγεται η έννοια του μέτρου (measure). Για κάθε εξεταζόμενο πρόβλημα επιλέγονται κάποιες διαστάσεις ως θεμελιώδεις και οι παραπάνω τρεις έννοιες εξαρτώνται από αυτές. Υποθέτουμε πως έχουμε *n* το πλήθος διαστάσεις. Οι διαστάσεις θα συμβολίζονται με $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, ...$

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $m \le n$ θετικές σταθερές, τις $a, b, c, ...$ Είναι κατανοητό και από όσα έχουμε αναφέρει ότι αυτές είναι διαστατικά ανεξάρτητες, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει σύνολο αριθμών $\alpha, \beta, \gamma, ...$ εκτός από το 0,0,0,… τέτοιο που το γινόμενο $a^\alpha b^\beta c^\gamma ...$ να είναι αδιάστατο.

Για κάθε φυσικό μέγεθος και για κάθε σύνολο από *n* θετικές και διαστατικά ανεξάρτητες σταθερές $a, b, c, ...$ υπάρχει ένα μοναδικό σύνολο αριθμών $\alpha, \beta, \gamma, ...$έτσι που η ποσότητα $\bar{q} = \frac{q}{a^\alpha b^\beta c^\gamma ...}$ να είναι αδιάστατη. Η αδιάστατη ποσότητα $\bar{q}$ θα ονομάζεται το *μέτρο* (measure) του q ως προς τις δεδομένες σταθερές. Πρόκειται για ένα είδος γενίκευσης της αριθμητικής τιμής ως προς κάποιες μονάδες μέτρησης.

Η συνάρτηση $\phi(x, y, z, ..., A, B, C, ...)$, όπου $x, y, z, ...$ μεταβλητές και $A, B, C, ...$ σταθερές, είναι διαστατικά ομογενής αν $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ..., \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ...) = k\phi(x, y, z, ..., A, B, C, ...)$. Το k είναι γινόμενο δυνάμεων των σταθερών $a, b, c, ...$ έτσι που το δεύτερο μέλος της εξίσωσης να είναι αδιάστατο όπως και το πρώτο

μέλος. Αν η συνάρτηση ϕ είναι διαστατικά ομογενής, τότε και η εξίσωση $\phi=0$ λέγεται ότι είναι διαστατικά ομογενής. Αυτό είναι γενίκευση αυτού που ξέρουμε ήδη, δηλαδή ότι μία διαστατικά ομογενής εξίσωση ισχύει η ίδια αν στη θέση των τιμών των μεγεθών που περιλαμβάνει βάλουμε τις αριθμητικές τιμές τους. Είναι σαφές ότι η εξίσωση ισχύει για κάθε σύνολο θεμελιωδών μονάδων.
Η ομογενής εξίσωση:

$$\phi(x,y,z,...,A,B,C,...)=0,$$

είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την:

$$\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},...,\bar{A},\bar{B},\bar{C},...)=0.$$

Αν οι σταθερές $A,B,C,...$ είναι θετικές, ανεξάρτητες σταθερές, τότε μπορεί να ληφθούν ως οι σταθερές (αναφοράς) $a,b,c,...$ οπότε τα μέτρα τους θα είναι 1,1,1,…
Δηλαδή καταλήγουμε στην απλοποιημένη αδιάστατη εξίσωση,

$$\phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},...,1,1,1,...)=0$$

Σημειώνουμε ότι το πλήθος *m* των σταθερών που μπορούμε να διαχειριστούμε με αυτόν τον τρόπο είναι μικρότερο ή ίσο με το πλήθος των διαστάσεων $\mathrm{L},\mathrm{M},\mathrm{T},...$ που ισούται με *n*, δηλαδή $m\le n$. Θα δούμε στην πράξη πώς εφαρμόζουμε τα ανωτέρω.

Ας θεωρήσουμε τη γνωστή ομογενή σχέση για το διάστημα συναρτήσει του χρόνου στην πτώση μέσα στο πεδίο βαρύτητας:

$$z-z_0-\upsilon_0 t-\frac{1}{2}gt^2=0$$

Οι μεταβλητές είναι τα z,t, οι σταθερές τα z_0,υ_0,g. Οι διαστάσεις είναι δύο, τα L,T, επομένως μπορούμε να εξισώσουμε με μονάδα μόνο δύο σταθερές, έστω τις z_0,g. Η σχετική ορίζουσα έχει τιμή -2, οπότε αυτές είναι διαστατικά ανεξάρτητες και μπορεί να χρησιμοποιηθούν. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω χωρίς πολλή σκέψη, αλλά προτιμούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω μέθοδο που εξηγεί τι υπάρχει από πίσω.

Είναι ευνόητο πως το γινόμενο αυτών των σταθερών με το οποίο πρέπει να διαιρεθεί η παραπάνω εξίσωση ώστε να γίνει αδιάστατη είναι $z_0 g^0=z_0$. Διαιρούμε διά z_0 τους δύο πρώτους όρους της εξίσωσης. Τον τρίτο όρο τον διαιρούμε διά $z_0=\left(z_0^{1/2}g^{1/2}\right)\left(z_0^{1/2}g^{-1/2}\right)$ και τον τέταρτο διά $g\left(z_0 g^{-1}\right)$. Έχουμε:

$$\frac{z}{z_0}-1-\frac{\upsilon_0}{z_0^{1/2}g^{1/2}}\frac{t}{z_0^{1/2}g^{-1/2}}-\frac{1}{2}\frac{g}{g}\left(\frac{t}{z_0^{1/2}g^{-1/2}}\right)^2=0$$

Εισάγουμε τα αδιάστατα μεγέθη,

$$\bar{z}=\frac{z}{z_0},\bar{\upsilon}_0=\frac{\upsilon_0}{z_0^{1/2}g^{1/2}},\ \bar{t}=\frac{t}{z_0^{1/2}g^{-1/2}}$$

και καταλήγουμε στην αδιάστατη εξίσωση:

$$\bar{z}-1-\bar{\upsilon}_0\bar{t}-\frac{1}{2}\bar{t}^2=0$$

Με την αντίστροφη διαδικασία, λαμβάνουμε υπόψη τις σχέσεις με τις οποίες ορίσαμε τα αδιάστατα μεγέθη και καταλήγουμε στην αρχική, κανονική εξίσωση. Η απλή διαδικασία συνίσταται στο να θέσουμε στην αρχική στη θέση των δύο σταθερών 1 και να γράψουμε στη θέση των άλλων μεγεθών τα αδιάστατά τους. Για να βρούμε από την αδιάστατη την κανονική εξίσωση χρειάζεται να προσδιορίσουμε με τι γινόμενο δυνάμεων των δύο σταθερών πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το κάθε αδιάστατο μέγεθος ώστε να οδηγηθούμε στο μέγεθος με τις σωστές διαστάσεις.

Ας εξετάσουμε και το ακόλουθο πρόβλημα: ένα σωμάτιο μάζας m έλκεται από δύναμη $F=-k/r^2$, $k>0$ προς ελκτικό κέντρο που βρίσκεται στη θέση $r=0$. Το σωμάτιο ξεκινά από τη θέση $r=a(>0)$ από την ηρεμία. Να βρεθεί ο χρόνος που θα φτάσει στο ελκτικό κέντρο.

Λαμβάνουμε υπόψη ότι έχουμε κίνηση μέσα σε συντηρητικό πεδίο, οπότε διατηρείται η μηχανική ενέργεια του σωματίου. Η αρχική μηχανική ενέργεια είναι $-k/a$, οπότε ισχύει

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{k}{r}=-\frac{k}{a}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$ και ολοκληρώνοντας από $r=a$ μέχρι $r=0$. Οι διαστάσεις είναι τα $\mathrm{L,M,T}$. Θα λύσουμε το πρόβλημα «διώχνοντας» πρώτα τις τρεις σταθερές $m/2,k,a$. Έτσι δεν θα έχουμε να κουβαλούμε κατά τους ενδιάμεσους υπολογισμούς πολύπλοκες εκφράσεις. Αυτές οι τρεις σταθερές μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως θεμελιώδεις, διότι αποτελούν πλήρες σύνολο, είναι ανεξάρτητες. Πράγματι οι διαστάσεις τους είναι αντιστοίχως, $\mathrm{M},\left[\mathrm{L^3M^1T^{-2}}\right],\mathrm{L}$ ή $\left[\mathrm{L^0M^1T^0}\right],\left[\mathrm{L^3M^1T^{-2}}\right],\left[\mathrm{L^1M^0T^0}\right]$. Για να είναι ανεξάρτητες αυτές οι σταθερές, πρέπει να μην μηδενίζεται η ορίζουσα της μήτρας:

$$\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα έχει τιμή -2, επομένως οι σταθερές μπορεί να ληφθούν ως θεμελιώδεις.
Η αδιάστατη εξίσωση βρίσκεται από την αρχική κάνοντας τις αντικαταστάσεις,

$$r\to\bar{r},t\to\bar{t},m/2\to 1,\ k\to 1,\ a\to 1,$$

οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)^2-\frac{1}{\bar{r}}=-1.$$

Λύνουμε ως προς $\mathrm{d}t/\mathrm{d}r$,

$$\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}\bar{r}}=-\left(\frac{\bar{r}}{1-\bar{r}}\right)^{1/2}.$$

Διαλέχτηκε το πρόσημο μείον, διότι η απόσταση μειώνεται όσο αυξάνεται ο χρόνος. Η λύση αυτής της εξίσωσης βρίσκεται, προφανώς, ολοκληρώνοντας μεταξύ $\bar{r}=1$ μέχρι $\bar{r}=0$. Ο αδιάστατος χρόνος που προκύπτει είναι $\bar{\tau}=\pi/2$. Στη συνέχεια πρέπει από αυτό το αποτέλεσμα να βρούμε τον χρόνο με τις κανονικές του διαστάσεις. Αυτό γίνεται αν βρούμε το γινόμενο παραγόντων των σταθερών $m/2,k,a$ με το οποίο πολλαπλασιάζουμε το αδιάστατο $\bar{\tau}$ για να βρούμε το κανονικό τ. Θα έχουμε $\tau=\bar{\tau}\left(m/2\right)^{\alpha}k^{\beta}a^{\gamma}$, όπου οι εκθέτες είναι αυτοί που κάνουν το γινόμενο να έχει διαστάσεις χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η διαστατική εξίσωση:

$$\mathrm{T}=\mathrm{M}^{\alpha}\left[\mathrm{L^3MT^{-2}}\right]^{\beta}\mathrm{L}^{\gamma}$$

οπότε

$$1=-2\beta,\ \alpha+\beta=0,\ 3\beta+\gamma=0,$$

Τελικώς

$$\alpha = 1/2,\ \beta = -1/2,\ \gamma = 3/2.$$

Ο ζητούμενος χρόνος είναι

$$\tau = \frac{\pi}{2}\left(\frac{ma^3}{2k}\right)^{1/2}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα βρίσκει κάποιος λύνοντας την αρχική (διαφορική) εξίσωση με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Στην πράξη δεν χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για τα αδιάστατα μεγέθη, γράφουμε q αντί για $\bar{q}$, όμως ξέρουμε περί τίνος πρόκειται, οπότε δεν κάνουμε λάθη.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 1

Aitchison, I. J. R., & Hey, A. J. G. (1984). *Gauge theories in particle physics*. Adam Hilger LTD.

Bilenky, S. M. (1993). *Quantum field theory for experimentalists*. European School of HEP.

Birge, R. T. (1934). On electric and magnetic units and dimensions. *American Physics Teacher*, *2*(4).

Birge, R. T. (1934). On the establishment of fundamental and derived units, with special reference to electric units, Part I. *American Physics Teacher, 41*(2), 102-109.

Birge, R. T. (1935). On the establishment of fundamental and derived units, with special reference to electric units, Part II. *American Physics Teacher*, *102*(3), 171-179.

Bureau International des Poids et Mesures. (2019). *Le Système international d'Unités (SI)* (9th ed.).

Carron, N. J. (2015). *Babel of units, the evolution of units systems in classical electrodynamics*. Rock West Solutions, Inc.

CGPM. (2014). Resolutions adopted by the CGPM at its 25th meeting (18-20 November 2014).

Cohen, R. E., & Giacomo, P. (1987). *Symbols, units, nomenclature and fundamental constants in physics* (revised 2010). International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), Document I.U.P.A.P. - 25 (SUNAMCO 87-1).

Eichenberger, A., Baumann, H., Mortara, A., Tommasini, D., Reber, D., Klingele, E., Jeanneret, B., & Jeckelmann, B. (2022). First realization of the kilogram with the METAS Kibble balance. *Metrologia*, *59*, 025008.

ΕΛΟΤ. (1999). *SI: Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων*.

Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας. (1983). Νόμιμες μονάδες μετρήσεως στην Ελλάδα. Προεδρικό Διάταγμα, Α΄196, Αθήνα 30 Δεκεμβρίου 1983.

Fujii, K., et al. (2016). Realization of the kilogram by the XRCD method. *Metrologia*, *53*, A19.

Halzen, F., & Martin, A. D. (1984). *Quarks and leptons.* John Wiley and Sons.

Heras, J. A., & Baez, G. (2009). *The covariant formulation of Maxwell's equations expressed in a form independent of specific units*. arXiv:0901.0194v1 [physics.class-ph].

Heras, J. A. (2007). Can Maxwell's equations be obtained from the continuity equation? *American Journal of Physics*, *75*(7).

Jaffe, R. L. (2007). *MIT quantum theory notes*.

JCGM. (2008). *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)* (3rd ed., 2008 version with minor corrections).

International Standard. (1992). *ISO 31-0* (3rd ed.).

Kind, D., & Quinn, T. (1998). *Metrology Quo Vadis?* Physics Today.

Mills, I. M., Mohr, P. J., Quinn, T. J., Taylor, B. N., & Williams, E. R. (2006). Redefinition of the kilogram, ampere, kelvin and mole: A proposed approach to implementing CIPM recommendation 1 (CI-2005). *Metrologia*, *43*, 227-246.

Mohr, P. J. (2008). Defining units in the quantum-based SI. *Metrologia*, *45*, 129-133.

Nelson, R. A. (1998). *Guide for metric practice*. Physics Today.

Newell, D. B. (2014). *A more fundamental International System of Units.* Physics Today.

Petrascheck, D. (2021). Unit system independent formulation of electrodynamics. *European Journal of Physics*, *42,* 045201.

Robinson, I. A., & Schlamminger, S. (2016). The watt or Kibble balance: A technique for implementing the new SI definition of the unit of mass. *Metrologia*, *53*, A46-A74.

Selvan, K. T. (2012). Fundamentals of electromagnetic units and constants. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, *54*(3).

Taylor, B. N. (2011). The current SI seen from the perspective of the proposed new SI. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, *116*, 797-807.

Thompson, A., & Taylor, B. N. (2008). *Guide for the use of the International System of Units (SI)* (NIST Special Publication 811, 2008 Edition).

Weber, W., & Kohlrausch, R. (1856). Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik*, *99*, 10-25. (English translation by D. H. Delphenich, Electrodynamic measurements in particular attributing mechanical units to measures of current intensity).

Κεφάλαιο 2
Σημαντικά Ψηφία

Θεωρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές (οι αριθμοί) είναι γραμμένες όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 2.1:

Πίνακας 2.1 *Γραφή αριθμών*

α) $\pm$...XXX XXX,XXX XXX...

β) $\pm$ XXX XXX XXX...

γ) $\pm$...XXX XXX, XXX XXX... $\times\ 10^n \quad n =$ ακέραιος

δ) $\pm$ XXX XXX XXX...$\times 10^n \quad n =$ ακέραιος.

Αυτά σημαίνουν: α) δεκαδικό αριθμό, β) ακέραιο, γ) δεκαδικό με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα και δ) ακέραιο με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα. Τα σημαντικά ψηφία του αριθμού είναι αυτά που σημειώνονται στον Πίνακα 2.1 με ...XXX... .

Με τον όρο «σημαντικά» θεωρούνται γενικώς εκείνα από τα ψηφία ...XXX... του αριθμού τα οποία είναι λίγο πολύ «γνωστά». Δεν θα σχολιάσουμε περισσότερο αυτό το θέμα. Θα θεωρούμε ότι οι δεδομένοι αριθμοί είναι γραμμένοι με όλα τα ...XXX... που είναι τα σημαντικά τους ψηφία.

Υπάρχουν οι εξής συμβατικοί κανόνες σχετικά με τα σημαντικά ψηφία:

α) Όλα τα μη μηδενικά ψηφία ενός αριθμού είναι σημαντικά ψηφία.

β) Τα μηδέν μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά.

γ) Τα μηδέν πριν από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν είναι σημαντικά ψηφία.

δ) Τα μηδέν μετά το τελευταίο ψηφίο που δεν είναι ίσο με μηδέν είναι σημαντικά μόνον αν υπάρχει το σημάδι των δεκαδικών στον αριθμό. Αυτός ο κανόνας είναι καλό να τηρείται, διότι στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει γενικώς ασάφεια ως προς πόσα από τα τελευταία μηδενικά είναι σημαντικά. Συνιστάται η χρήση κατάλληλου πολλαπλασιαστή που είναι δύναμη του δέκα.

Σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες έχουμε για τους αριθμούς που ακολουθούν το αντίστοιχο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Πίνακας 2.2 *Παραδείγματα απαρίθμησης σημαντικών ψηφίων αριθμών.*

1,35	3 σημαντικά ψηφία
-0,107	3 σημαντικά ψηφία
0,050 20	4 σημαντικά ψηφία
-500	1 σημαντικό ψηφίο
500,0	4 σημαντικά ψηφία
50×10^1	1 σημαντικό ψηφίο
5×10^2	1 σημαντικό ψηφίο
$1{,}520 \times 10^5$	4 σημαντικά ψηφία
152 000	3 σημαντικά ψηφία
$-1{,}7 \times 10^{-4}$	2 σημαντικά ψηφία

Μερικές φορές, για ευκολία, αναφέρεται στο κείμενο ότι τα σημαντικά ψηφία είναι (π.χ.) 3 και δεν τηρούνται ακριβώς οι παραπάνω κανόνες γραφής. Επίσης, μερικές φορές για ευκολία (κακώς) τα μηδενικά στο τέλος θεωρούνται ότι είναι πάντοτε σημαντικά ψηφία.

Η ομαδοποίηση ανά τρία ψηφία είναι θέμα επιλογής. Δεν ακολουθείται σε μερικές ειδικές εφαρμογές όπως σε σχέδια μηχανικών, σε κείμενα οικονομικών και σε γραπτά που πρόκειται να διαβαστούν από υπολογιστή. Στην περίπτωση αριθμών που υπάρχουν σε κάποιον πίνακα καλό είναι να μην αλλάζει ο τρόπος γραφής μέσα σε μια στήλη. Συνήθως αν η στήλη περιέχει μόνο ακέραιους, τα τελικά ψηφία του αριθμού κάθε σειράς βρίσκονται το ένα κάτω από το άλλο. Αν έχουμε δεκαδικούς, το πρόσημο των δεκαδικών είναι το ένα κάτω από το άλλο. Ένα άλλο που αξίζει να σημειώσουμε είναι η περίπτωση αριθμών που σημειώνονται σε άξονες συστημάτων συντεταγμένων, όπου απεικονίζονται γραφικές παραστάσεις. Οι αριθμοί που σημειώνονται θεωρούνται ακριβείς, χωρίς αβεβαιότητα. Τέλος, αν αναφέρεται ότι κάποια (αριθμητική) τιμή είναι ακριβής, δεν παίζει ρόλο η γραφή της. Ένα παράδειγμα είναι ότι η τεχνική σταθερά είναι $K_{\mathrm{cd}} = 683\ \mathrm{lmW^{-1}}$ ακριβώς, δηλαδή αυτή η γραφή δεν σημαίνει ότι τα σημαντικά ψηφία είναι μόνο τρία. Θα έλεγε κάποιος ότι η αριθμητική τιμή είναι γνωστή με «άπειρα» σημαντικά ψηφία, τα οποία μετά το 3 είναι όλα μηδέν.

Αν έχουμε τον αριθμό 0,516 784 252 και θέλουμε να τον στρογγυλοποιήσουμε ώστε να έχει τρία σημαντικά ψηφία, τότε τον αντικαθιστούμε με τον «πλησιέστερό» του αριθμό με τρία σημαντικά. Αυτός είναι ο 0,517. Αυτή είναι στρογγυλοποίηση προς τα άνω, διότι ο τελικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του αρχικού. Ο αριθμός 1,723 στρογγυλοποιείται σε αριθμό με δύο σημαντικά που είναι ο 1,7. Τώρα έχουμε στρογγυλοποίηση προς τα κάτω, διότι ο τελικός αριθμός είναι μικρότερος του αρχικού. Αν έχουμε τον αριθμό 1,75 και πρέπει να τον στρογγυλοποιήσουμε σε δύο σημαντικά, τότε μπορούμε να τον στρογγυλοποιήσουμε προς τα πάνω και να πάρουμε τον 1,8 ή προς τα κάτω και να πάρουμε τον 1,7. Συνήθως προτιμούμε την πρώτη λύση η οποία έχει καθιερωθεί να γίνεται στους υπολογιστές. Μια άλλη μέθοδος είναι να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο αριθμό με το τελευταίο ψηφίο ζυγό. Αυτό βοηθά σε περιπτώσεις όπως όταν έχουμε να επεξεργαστούμε σειρά από πολλά δεδομένα, οπότε η διαδικασία αυτή οδηγεί σε μικρότερα σφάλματα στρογγυλοποίησης, διότι (σχεδόν) οι μισές στρογγυλοποιήσεις θα είναι προς τα πάνω και οι άλλες μισές προς τα κάτω.

Πολλές φορές έχουμε αριθμητικές τιμές που είναι γνωστές με άπειρα σημαντικά ψηφία. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι ο αριθμός είναι (π.χ.) 2 ακριβώς. Συνήθως αυτό φαίνεται από τα «συμφραζόμενα» π.χ. 2L, εδώ το 2 είναι ακριβώς και όχι με μόνο ένα σημαντικό ψηφίο όπως φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Το π θεωρείται γνωστό με άπειρα σημαντικά ψηφία, παρόλο που σε πράξεις μπορεί να χρησιμοποιούμε λίγα σημαντικά ψηφία του. Στις περιπτώσεις που η γραφή δεν ακολουθεί όσα είπαμε για σημαντικά ψηφία, στηριζόμαστε στην «κοινή» λογική μας για την κατανόηση του τι εννοείται.

Θα πούμε δύο λόγια για το πλήθος των σημαντικών ψηφίων που έχει ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση δύο ή περισσότερων αριθμών οι οποίοι δίνονται με συγκεκριμένα σημαντικά ψηφία. Ο ένας αριθμός έχει το ελάχιστο πλήθος από σημαντικά ψηφία από τους άλλους, ο αριθμός που προκύπτει δεν μπορεί να έχει περισσότερα σημαντικά από αυτό το ελάχιστο πλήθος. Στην πράξη λαμβάνεται να έχει αυτό το ελάχιστο πλήθος σημαντικών. Προφανώς μπορεί περισσότεροι του ενός να έχουν το ελάχιστο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Παραδείγματα

$0{,}851 \times 0{,}80 = 0{,}68$

$-3{,}25 \times 0{,}21/0{,}8 = -0{,}9$

$0{,}0752/0{,}012 = 6{,}3$

$1{,}35 \times 10^4 \times (0{,}73/(0{,}2 \times 10^1)) \times 10^2 = 0{,}5 \times 10^2.$

Τώρα θα μιλήσουμε για τον αριθμό που προκύπτει από την πρόσθεση και την αφαίρεση δύο ή περισσότερων δεδομένων αριθμών. Ξέρουμε τα σημαντικά ψηφία του κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, ανεξάρτητα από πόσα και ποια είναι τα σημαντικά ψηφία του αριθμού, τον γράφουμε ως δεκαδικό (ή ακέραιο) χωρίς πολλαπλασιαστή. Ο γραμμένος αριθμός διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά. Το πρώτο σημαντικό ψηφίο ενός αριθμού το οποίο είναι και το ψηφίο της ανώτερης τάξης, είναι το πιο αριστερό του σημαντικό ψηφίο, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αριθμού είναι το πιο δεξιό του σημαντικό ψηφίο και είναι το ψηφίο της κατώτερης τάξης. Σε αυτήν την περίπτωση αυτό που χρειάζεται να εξετάσουμε είναι η τάξη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού (ελάχιστη τάξη ψηφίων του αριθμού). Βρίσκουμε τελικώς τη μέγιστη από αυτές τις ελάχιστες τάξεις για όλους τους αριθμούς. Ο αριθμός που είναι το αποτέλεσμα των προσθέσεων και αφαιρέσεων δεν μπορεί να έχει ψηφία με μικρότερη τάξη από αυτήν τη μέγιστη τάξη. Στην πράξη παίρνουμε ψηφία μέχρι και τη μέγιστη τάξη.

Παραδείγματα

10,001 ελάχιστη τάξη 10^{-3} (χιλιοστά)
0,0003 ελάχιστη τάξη 10^{-4} (δέκατα του χιλιοστού)
0,85 ελάχιστη τάξη 10^{-2} (εκατοστά)
Μέγιστη τάξη μεταξύ αυτών είναι η 10^{-2} (εκατοστά),
άρα 10,001 + 0,0003 - 0,85 = 9,15

124 ελάχιστη τάξη 10^{0} (μονάδες)
$5{,}0 \times 10^{2}$ ελάχιστη τάξη 10^{1} (δεκάδες), βλέπε παρακάτω
7,8 ελάχιστη τάξη 10^{-1} (δέκατα)
Μέγιστη τάξη αυτών των αριθμών είναι 10^{1} (δεκάδες) άρα:
$124 - 5{,}0 \times 10^{2} + 7{,}8 = -3{,}7 \times 10^{2}$.

Εξηγούμε τι συμβαίνει με τον αριθμό $5{,}0 \times 10^{2}$. Σε αυτόν τον αριθμό υπάρχουν δύο σημαντικά ψηφία, το 5 και το διπλανό του, προς τα δεξιά μας, 0. Ο αριθμός σε μορφή δεκαδικού, εδώ ακέραιου, είναι 500. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, μόνο τα δύο πρώτα ψηφία είναι σημαντικά, άρα η ελάχιστη τάξη είναι η τάξη του μηδενός που είναι δίπλα στο 5, δηλαδή η τάξη των δεκάδων, οπότε $5{,}0 \times 10^{2}$ ελάχιστη τάξη 10^{1} (δεκάδες). Όταν κάνουμε πολλές πράξεις, στρογγυλοποιούμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα και όχι τους αριθμούς στα ενδιάμεσα βήματα.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2

Bureau International des Poids et Mesures. (2019). *Le Système international d'Unités* (The International System of Units, SI) (9th ed.).

de Oliveira Sannibale, V. (2001). *Measurements and significant figures* (Draft). Caltech, Freshman Physics Laboratory.

Luna, E. (2022). *Uncertainties and significant figures*. DeAnza College.

Significant Figures-Rules. (n.d.). Aiken. University of South Carolina.

Significant figures. (n.d.). In Wikipedia. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Significant_figures

Thompson, A., & Taylor, B. N. (2008). *Guide for the use of the International System of Units (SI)* (NIST Special Publication 811, 2008 Edition).

Χριστοδουλίδης, Κ. (2009). *Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

Κεφάλαιο 3
Διαστατική Ανάλυση

Με τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να βρούμε λύση ενός φυσικού προβλήματος ή να αναγάγουμε ένα πρόβλημα της φυσικής σε απλούστερο ακόμη και όταν δεν έχουμε ακριβή θεωρία που να μας λύνει το πρόβλημα και να μας οδηγεί στις κατάλληλες εξισώσεις. Θα σχολιάσουμε την επιλογή των θεμελιωδών μεγεθών (μεγέθη αναφοράς) και των αντίστοιχων θεμελιωδών μονάδων τους (ή μονάδες αναφοράς). Για τον κλάδο της Μηχανικής θεμελιώδη μεγέθη με τις αντίστοιχες θεμελιώδεις μονάδες τους έχουν θεωρηθεί από παλιά το μήκος $l(L)$, η μάζα m (M) και ο χρόνος $t(T)$. Εδώ η σειρά δεν είναι ουσιαστική. Αυτά χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες διαστάσεις $\mathsf{L,M,T}$. Οι ερωτήσεις που προκύπτουν είναι:

1. Η παραπάνω επιλογή είναι ικανή για την περιγραφή της δομής των μονάδων όλων των φυσικών ποσοτήτων της Μηχανικής;
2. Γιατί επιλέξαμε αυτά τα μεγέθη ως θεμελιώδη;

Σχετικά με το (1) αναφέρουμε ότι έχει προκύψει εμπειρικά πως όλη η δομή της Κλασικής Μηχανικής μπορεί να αναπτυχθεί με την παραπάνω επιλογή, ενώ όλα τα άλλα (παράγωγα) μεγέθη μπορεί να καθοριστούν από τις γνωστές εξισώσεις που τα συνδέουν με τα παραπάνω θεμελιώδη μεγέθη, στα πλαίσια ενός συστήματος μεγεθών. Οι διαστάσεις τους (ή η διάστασή τους) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των L, M, T. Επίσης, οι μονάδες των παράγωγων μεγεθών της Μηχανικής μπορεί να εκφραστούν ως συναρτήσεις των μονάδων των παραπάνω θεμελιωδών μεγεθών. Αυτή η επιλογή είναι ικανή. Όμως η επιλογή αυτή δεν είναι αναγκαία, διότι μπορεί να επιλεγούν τρεις άλλες ποσότητες ως θεμελιώδεις. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλεγεί η τριάδα μήκος l, δύναμη F, και χρόνος t. Παριστάνουμε τις διαστάσεις τους με $\mathsf{L,F,T}$ αντιστοίχως. Αν επεκταθούμε και σε άλλες περιοχές της Φυσικής όπως της θερμότητας, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, τότε είναι βολικό να εισαχθούν και άλλα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη και αντίστοιχες μονάδες, δηλαδή έχουμε εκτεταμένες ομάδες θεμελιωδών μεγεθών. Φυσικά μπορεί να γραφτούν εξισώσεις μεταξύ των μεγεθών στο πλαίσιο κάποιου συστήματος μεγεθών έτσι που να μην είναι αναγκαίο να εισαχθούν επιπλέον θεμελιώδη μεγέθη, αλλά να υπάρχουν σχέσεις που συνδέουν αυτές τις νέες ποσότητες με τις τρεις θεμελιώδεις που αναφέραμε. Όμως υπάρχουν διάφοροι λόγοι που οδηγούν στη χρήση εκτεταμένων ομάδων θεμελιωδών μεγεθών. Ένας από αυτούς είναι ότι συστήματα μονάδων με λίγες θεμελιώδεις μονάδες είναι στείρα με την έννοια ότι δεν είναι πρόσφορα για τη διαστατική ανάλυση. Επίσης, διαστατικοί εκθέτες σε συστήματα με λίγα θεμελιώδη μεγέθη μπορεί να μην είναι ακέραιοι, πράγμα που δεν είναι καταδικαστέο, αλλά προτιμούμε να έχουμε όσο γίνεται περισσότερους ακέραιους διαστατικούς εκθέτες, διότι αυτό μας φαίνεται πιο φυσιολογικό.

Στο πλαίσιο της Μηχανικής, η επιλογή των συγκεκριμένων θεμελιωδών μεγεθών M, L, T είναι εμπειρική, αλλά ούτε είναι αναγκαία ούτε στηρίζεται σε κάποια βαθύτερα θεωρητικά αίτια. Όμως, πρέπει να τονιστεί ότι η επιλογή των τριών θεμελιωδών μεγεθών δεν μπορεί να είναι τελείως αυθαίρετη. Για παράδειγμα, αν διαλέξουμε ως θεμελιώδη μεγέθη το μήκος l, την ταχύτητα υ και τον χρόνο t, τότε σε ένα τέτοιο σύστημα μεγεθών δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε μεγέθη που περιέχουν μάζα και επιπλέον, δεν θα υπήρχε μονοσήμαντος τρόπος έκφρασης των μεγεθών που περιέχουν ταχύτητα.

Πρέπει οι θεμελιώδεις μονάδες να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και δεν πρέπει μια θεμελιώδης μονάδα να μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άλλων θεμελιωδών μονάδων, με τον γνωστό τρόπο γινομένου δυνάμεων. Ας εξετάσουμε την περίπτωση με τα προηγούμενα τρία θεμελιώδη μεγέθη M, L, T. Οι διαστάσεις τους είναι $\mathsf{M,L,T}$ και οι (θεμελιώδεις) μονάδες τους είναι αντιστοίχως, $[M],[L],[T]$ Έστω ότι τα νέα θεμελιώδη μεγέθη είναι τα p,q,r με διαστάσεις $\dim p = \mathsf{P}$, $\dim\ q = \mathsf{Q}$ και $\dim\ r = \mathsf{R}$ και αντίστοιχες μονάδες $[p],[q],[r]$. Κατά τα γνωστά, έχουμε τις εξαρτήσεις για τις διαστάσεις (διαστατικές εξισώσεις):

$$\mathsf{P} = \mathsf{M}^a \mathsf{L}^b \mathsf{T}^c$$
$$\mathsf{Q} = \mathsf{M}^d \mathsf{L}^e \mathsf{T}^f$$
$$\mathsf{R} = \mathsf{M}^g \mathsf{L}^h \mathsf{T}^i$$

Οι εκθέτες είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Για τις αντίστοιχες μονάδες τους έχουμε:

$$[p] = k_p [M^a L^b T^c] = k_p [M]^a [L]^b [T]^c$$
$$[q] = k_q [M^d L^e T^f] = k_q [M]^d [L]^e [T]^f$$
$$[r] = k_r [M^g L^h T^i] = k_r [M]^g [L]^h [T]^i$$

Σημειώνουμε ότι δεν είναι απαραίτητο οι νέες μονάδες να οριστούν ως σύμφωνες παράγωγες μονάδες, απλά θα είναι θεμελιώδεις μονάδες στο νέο σύστημα μονάδων, οπότε γενικώς μπορεί να εισαχθούν αυθαίρετοι αδιάστατοι συντελεστές, τα k. Αποδεικνύεται με επιχειρηματολογία της Γραμμικής Άλγεβρας, όπως είδαμε στην περίπτωση της χρήσης των επτά θεμελιωδών σταθερών στους ορισμούς των μονάδων του SI, ότι για να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τα νέα θεμελιώδη μεγέθη p, q, r και οι μονάδες τους, πρέπει να ισχύει για την παρακάτω ορίζουσα των διαστατικών εκθετών η σχέση:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Αν η ορίζουσα είναι μηδέν, τότε τα νέα μεγέθη δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θεμελιώδη, διότι δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες σχέσεις. Με άλλα λόγια, δεν μπορούν τα παλιά μεγέθη να εκφραστούν συναρτήσει των νέων, δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις δεν αντιστρέφονται. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για αυτόν τον σκοπό την εξής επιχειρηματολογία: η διάσταση ενός παράγωγου μεγέθους, x, στο αρχικό σύστημα M, L, T είναι $\mathsf{X} = \mathsf{M}^{a_1} \mathsf{L}^{a_2} \mathsf{T}^{a_3}$. Στο «νέο» σύστημα p,q,r θα ισχύει $\mathsf{X} = \mathsf{M}^{s_1} \mathsf{L}^{s_2} \mathsf{T}^{s_3}$. Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη των εκφράσεων για τα X, αφού τα εκφράσουμε όλα συναρτήσει των αρχικών διαστάσεων και βρίσκουμε:

$$\left[\mathsf{M}^{a_1} \mathsf{L}^{a_2} \mathsf{T}^{a_3}\right] = \left[\mathsf{M}^a \mathsf{L}^b \mathsf{T}^c\right]^{s_1} \left[\mathsf{M}^d \mathsf{L}^e \mathsf{T}^f\right]^{s_2} \left[\mathsf{M}^g \mathsf{L}^h \mathsf{T}^i\right]^{s_3}.$$

Ένεκα της ομογένειας καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$a_1 = a\,s_1 + d\,s_2 + g\,s_3$$
$$a_2 = b\,s_1 + e\,s_2 + h\,s_3$$
$$a_3 = c\,s_1 + f\,s_2 + i\,s_3$$

Οι σχέσεις πρέπει να μπορούν να αντιστραφούν για να έχουμε τα s_1, s_2, s_3 συναρτήσει των a_1, a_2, a_3. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί με χρήση μητρών (πινάκων) ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

Για να μπορεί να γίνει αντιστροφή, πρέπει να έχουμε για την ορίζουσα της ανωτέρω μήτρας των εκθετών:

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η ορίζουσα της ανάστροφης της ανωτέρω μήτρας είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Μπορεί κάποιος να το αποδείξει ακολουθώντας έναν μη ορθόδοξο τρόπο, δηλαδή παίρνοντας «συμβολικά» τους λογαρίθμους των παραπάνω τριών διαστατικών εξισώσεων και λύνοντας ως προς $\ln \mathsf{M}$, $\ln \mathsf{L}$, $\ln \mathsf{T}$ κτλ. Πράγματι, για την παραπάνω περίπτωση έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \ln \mathsf{P} \\ \ln \mathsf{Q} \\ \ln \mathsf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \mathsf{M} \\ \ln \mathsf{L} \\ \ln \mathsf{T} \end{pmatrix}$$

Αυτές μπορούν να αντιστραφούν αν:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Δηλαδή βρήκαμε την ίδια συνθήκη που βρήκαμε με ορθόδοξο τρόπο προηγουμένως.

Στην περίπτωση που τα τρία μεγέθη είναι το μήκος (διάσταση L), ο χρόνος (διάσταση T) και η ταχύτητα (έστω διάσταση V) τότε:

$$\mathsf{L} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^1\mathsf{T}^0$$

$$\mathsf{T} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^1$$

$$\mathsf{V} = \mathsf{M}^0\mathsf{L}^1\mathsf{T}^{-1}$$

Άρα $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 1, g = 0, h = 1, i = -1$, οπότε η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \text{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως αυτές οι ποσότητες δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό είναι ευνόητο από το γεγονός ότι έχουμε δεχτεί ότι ισχύει η γνωστή σχέση, δηλαδή υπάρχει η εξάρτηση $\upsilon = l / t$. Θυμίζουμε ότι σε ένα σύστημα μεγεθών υπάρχουν συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των φυσικών μεγεθών. Μπορούμε να πούμε ότι η επιλογή του συνόλου των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να είναι τέτοια που:

α) Κανένα μέλος του συνόλου δεν μπορεί να παραχθεί από άλλο ή άλλα μέλη του συνόλου αυτού και

β) κάθε ποσότητα που δεν ανήκει στο σύνολο αυτό μπορεί να παραχθεί από αυτό το σύνολο. Τότε αυτό το σύνολο των μεγεθών λέγεται πλήρες σύνολο φυσικών μεγεθών.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ φυσικών μεγεθών είναι (διαστατικά) ομογενείς. Αυτό σημαίνει ότι όταν περιέχονται αθροίσματα ή διαφορές διάφορων όρων πρέπει οι όροι να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Επίσης, αν έχουμε μια εξίσωση μεταξύ εκφράσεων που περιέχουν διάφορες φυσικές ποσότητες πρέπει το πρώτο και το δεύτερο μέλος να έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

Μπορεί να γραφτούν ιδιάζουσες (νόθες) σχέσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών που είναι σωστές, αλλά δεν είναι ομογενείς (δηλαδή είναι σαν να προσθέτουν πρόβατα και αυγά). Ένα παράδειγμα είναι: $s + \upsilon = \frac{1}{2}gt^2 + gt$. Αυτή αναφέρεται στην πτώση υλικού σημείου μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Ουσιαστικά πρόκειται για δύο εξισώσεις που η καθεμία από μόνη της είναι ομογενής, δεν είναι όμως το άθροισμά τους. Πράγματι, ομογενείς είναι οι δύο σχέσεις: $s = \frac{1}{2}gt^2, \quad \upsilon = gt$. Τέτοιες νόθες σχέσεις δεν προκύπτουν από την ανάλυση κάποιου φυσικού φαινομένου, αλλά από αυθαίρετη πρόσθεση ανόμοιων μεγεθών (εδώ μήκος και ταχύτητα) όπως μπορεί να γίνεται στη μαθηματική (συνήθη) άλγεβρα, η οποία στα καθαρά μαθηματικά ασχολείται με αδιάστατες ποσότητες. Στη διαδικασία της ανάλυσης με βάση τους φυσικούς νόμους δεν προκύπτουν τέτοιες ιδιάζουσες (νόθες) εξισώσεις.

Άλλη περίπτωση είναι εξισώσεις Φυσικής που ισχύουν σε ειδικές περιπτώσεις, π.χ. η εξίσωση του απλού εκκρεμούς όταν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ (ακριβώς) , τότε η περίοδος του εκκρεμούς μπορεί να γραφτεί ως $\tau_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{l_\mathrm{m}} \approx 1{,}99\sqrt{l_\mathrm{m}}$. Αυτή είναι εμπειρική σχέση και ισχύει μόνο όταν ο χρόνος μετριέται σε δευτερόλεπτα και το μήκος σε μέτρα, δεν ισχύει για οποιεσδήποτε θεμελιώδεις μονάδες, άρα δεν είναι ομογενής. Συνήθως τη γράφουμε ως σχέση μεταξύ αριθμητικών τιμών, δηλαδή, $\{\tau\}_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{\{l\}_\mathrm{m}} \approx 1{,}99\sqrt{\{l\}_\mathrm{m}}$.

Μπορεί να κατανοήσει κάποιος γιατί στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης πρέπει το όρισμα να είναι αδιάστατο, δηλαδή (καθαρός) αριθμός. Έχουμε:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Αν το x δεν είναι αδιάστατο, δεν μπορούμε να προσθέσουμε τους όρους της σειράς, γιατί έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Ανάλογα ισχύουν και για διάφορες άλλες ειδικές μαθηματικές συναρτήσεις, όπως αρμονικές, λογαριθμικές κτλ.

Στη διαστατική ανάλυση έχουμε να απαντήσουμε στο πρόβλημα που ακολουθεί: Ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη ποσότητα (π.χ. το διάστημα που διανύει οριζόντια υλικό σημείο που κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας, την ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται μέσα σε έναν επιταχυντή κτλ). Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να βρούμε πώς εξαρτάται η τιμή μιας ποσότητας από τις τιμές άλλων ποσοτήτων, μεταβλητών, που μπορεί να την επηρεάζουν. Δηλαδή χρειάζεται να βρούμε μια σχέση της μορφής:

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3, Q_4 \ldots)$$

Τονίζουμε ότι είναι δυνατόν κάποιες ποσότητες να είναι του ίδιου είδους, για παράδειγμα μια ποσότητα να είναι ένα μήκος κάποιου αντικειμένου και κάποια άλλη να είναι μια ακτίνα. Αυτά τα μεγέθη έχουν ίδιες διαστάσεις και μονάδες μέτρησης. Ακόμη μπορεί κάποια μεγέθη να μην είναι όμοια, αλλά να έχουν ίδιες διαστάσεις. Μερικές ποσότητες, παρόλο που τις λέμε μεταβλητές, μπορεί να είναι ακόμη και φυσικές σταθερές οι οποίες έχουν διαστάσεις, όπως η ταχύτητα του φωτός κτλ. Μπορεί κάποιος να εικάσει ότι η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα όρων όπως φαίνεται παρακάτω. Αυτή η εικασία είναι κάτι ανάλογο με το ότι οι μονάδες των παράγωγων μεγεθών είναι γινόμενα δυνάμεων των μονάδων των θεμελιωδών μεγεθών. Όμως, πιο αυστηρά, υπάρχει μια θεμελιώδης μαθηματική πρόταση που ονομάζεται *Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass*. Σύμφωνα με αυτό, κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με όσο καλή προσέγγιση θέλουμε, με ένα άθροισμα όρων ως εξής:

$$f(Q_2, Q_3, Q_4 ...) = k_1 Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\beta_1} Q_3^{\gamma_1} ... + k_2 Q_1^{\alpha_2} Q_2^{\beta_2} Q_3^{\gamma_2} ... + k_3 Q_1^{\alpha_3} Q_2^{\beta_3} Q_3^{\gamma_3} ... + ...$$

Τα $k, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ είναι αδιάστατες σταθερές. Πρέπει ο κάθε όρος του αθροίσματος να έχει ίδιες διαστάσεις αφού εδώ πρόκειται για σχέση της Φυσικής η οποία πάντα είναι ομογενής σχέση μεταξύ φυσικών μεγεθών. Όλοι οι όροι θα έχουν την ίδια διαστατική σχέση. Προφανώς για το Q_1 πρέπει να ισχύει το ίδιο. Το άθροισμα μπορεί να περιέχει πεπερασμένο πλήθος ή άπειρο πλήθος όρων. Τα παραπάνω σημαίνουν πως αν συμβολίσουμε τις διαστάσεις των Q με Q, θα έχουμε,

$$\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_2^{\alpha} \mathsf{Q}_3^{\beta} \mathsf{Q}_4^{\gamma} ...$$

Ο πρώτος στόχος της ανάλυσής μας είναι να αποφασίσουμε ποιες είναι οι μεταβλητές με τιμές $Q_2, Q_3, Q_4 ...$ που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Σε αυτό το σημείο μπορεί να γίνουν λάθη. Δεν πρέπει να αγνοηθεί καμιά ποσότητα που μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα, ακόμη και αν είναι φυσική σταθερά και έχει διάσταση, π.χ. η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G, η σταθερά του Planck κτλ. Αν αυτό δεν επιτευχθεί, δηλαδή αν δεν ληφθεί υπόψη κάποια απαραίτητη μεταβλητή, τότε μπορεί να οδηγηθούμε σε αδιέξοδο, αλλά πιο συχνά σε ατελές ή εσφαλμένο αποτέλεσμα.

Από την άλλη πλευρά δεν βοηθά σε τίποτα να εισάγονται μεγέθη που δεν έχουν σχέση με το πρόβλημα που εξετάζουμε. Για παράδειγμα, σε πρόβλημα που σχετίζεται με ισορροπία ρευστού δεν χρειάζεται να εισαχθεί το ιξώδες, το οποίο είναι μέγεθος που σχετίζεται με κίνηση. Επίσης, δεν χρειάζονται μεγέθη που έχουν έμμεση σχέση με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία μπορεί να επηρεάζει την πυκνότητα ή την (ηλεκτρική) αντίσταση όταν αυτά τα μεγέθη εισέρχονται άμεσα στο πρόβλημα, οπότε δεν χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η θερμοκρασία η οποία επηρεάζει έμμεσα το πρόβλημα. Σε άλλες περιπτώσεις που υπάρχει ροή θερμότητας, η θερμοκρασία είναι απαραίτητη. Σε αυτήν την περίπτωση ανήκει και η περίπτωση που οι μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες, δηλαδή περιλαμβάνεται ποσότητα που εξαρτάται από τις άλλες, επομένως δεν χρειάζεται. Όταν λέμε ότι τα μεγέθη $Q_2, Q_3, Q_4 ...$ από τα οποία εξαρτάται το Q_1, είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, εννοούμε ότι η μεταβολή ενός από αυτά επηρεάζει το Q_1 αλλά δεν επηρεάζει τα άλλα. Δηλαδή μπορεί να μεταβάλονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Για τις φυσικές σταθερές θεωρούμε ότι μπορούμε να κάνουμε το ίδιο όπως και για τις άλλες ποσότητες, δηλαδή να μεταβάλουμε τις τιμές τους. Αν αυτό δεν επιτευχθεί, αλλά ληφθεί υπόψη μεταβλητή που δεν είναι ανάγκη να συμπεριληφθεί στο πρόβλημα, καταλήγουμε σε αποτέλεσμα με περισσότερους όρους και αδιάστατα μεγέθη που πρέπει να προσδιοριστούν «πειραματικά». Αυτό σημαίνει ότι το τελικό αποτέλεσμα απέχει περισσότερο από το «σωστό» αποτέλεσμα.

Τέλος δεν αρκεί μια εξίσωση να είναι σωστή διαστατικά, αλλά πρέπει να έχει και νόημα. Ένα απλό παράδειγμα είναι η σχέση για τη μάζα $m = 32{,}7\, m$, που δεν έχει νόημα, γιατί οδηγεί στο παράλογο αποτέλεσμα 0=32,7 !

Υπάρχουν βιβλία που αναφέρονται στη βιβλιογραφία μας, που περιέχουν πλήθος παραδειγμάτων στα οποία γίνεται χρήση της διαστατικής ανάλυσης για λύση προβλημάτων που καλύπτουν όλα τα πεδία της επιστήμης, από την κλασική ως την πιο σύγχρονη. Η διαστατική ανάλυση δεν λύνει πλήρως ένα πρόβλημα αλλά το ανάγει σε απλούστερο, το οποίο χρειάζεται να ολοκληρωθεί με προσδιορισμό πολύ λιγότερων παραμέτρων από ό,τι στο αρχικό πρόβλημα. Αυτό είναι μεγάλη ευκολία για περιπτώσεις που είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικοί τύποι (σχέσεις) από τη λύση δύσκολων εξισώσεων της θεωρίας ή μπορεί να μην υπάρχει σχετική θεωρία.

3.1 Μέθοδος Rayleigh

Η μέθοδος Rayleigh είναι η μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα από όλους τους ενδιαφερόμενους. Αυτή στηρίζεται στο ότι, όπως είπαμε, υπάρχει ομογένεια στις σχέσεις μεταξύ των φυσικών ποσοτήτων. Τα θεμελιώδη μεγέθη είναι το μήκος, η μάζα και ο χρόνος με αντίστοιχες διαστάσεις $\mathrm{L,M,T}$.

α) Θα ασχοληθούμε με ένα απλό πρόβλημα της Μηχανικής, το πρόβλημα του απλού εκκρεμούς του οποίου ξέρουμε τη λύση. Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στη σχέση της περιόδου του εκκρεμούς συναρτήσει διάφορων χαρακτηριστικών του εκκρεμούς. Εικάζουμε ότι τα μεγέθη που επηρεάζουν την περίοδο του εκκρεμούς (που εδώ παριστάνεται με το σύμβολο τ) είναι το μήκος του l, η μάζα του m, η ένταση του πεδίου βαρύτητας g και το πλάτος αιώρησής του, δηλαδή η γωνία εκτροπής φ (τη θεωρούμε σε μονάδες ακτίνια). Αυτά συμβολίζουν ειδικές ποσότητες του συγκεκριμένου προβλήματος. Ψάχνουμε για τη σχέση $\tau=\phi(l,m,g,\varphi)$. Το τ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ τα άλλα μεγέθη είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, διότι πράγματι η μεταβολή της καθεμίας από αυτές δεν επηρεάζει τις άλλες, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, στη σχέση που γράψαμε για το εκκρεμές. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, ο κάθε όρος από το άθροισμα που σχετίζεται με το ανάπτυγμα της παραπάνω σχέσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass, οδηγεί στην ακόλουθη γενική έκφραση για τον κάθε όρο του αθροίσματος στο οποίο αναπτύσσεται η περίοδος τ, $kl^a m^b g^c \varphi^d$. Για τις διαστάσεις έχουμε τη σχέση $\mathrm{T}^1=\mathrm{L}^a\,\mathrm{M}^b\left[\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2}\right]^c 1^d$. Χρησιμοποιήσαμε αγκύλες [ ], αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και κοινές παρενθέσεις ( ). Η διαστατική ομογένεια οδηγεί τελικώς στις τιμές $c=-1/2,\ a=1/2,\ b=0$. Ο εκθέτης d που σχετίζεται με το αδιάστατο μέγεθος που είναι η γωνία φ, δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαστατική ανάλυση. Το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Με όσα έχουμε πει, καταλήγουμε στο ότι η περίοδος μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα όρων, δηλαδή στη μορφή:

$$\tau=\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}\sum_n k_n\varphi^{d_n}\ .$$

Το $\sum_n k_n\varphi^{d_n}$ μπορεί να γραφτεί ως μια (άγνωστη) αδιάστατη συνάρτηση $\phi_1(\varphi)$, οπότε τελικώς καταλήγουμε στη σχέση για την περίοδο

$$\tau=\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}\phi_1(\varphi).$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από τη μάζα, βρήκαμε τη σωστή εξάρτηση από το μήκος και την ένταση της βαρύτητας, όπως δίνει και η αναλυτική λύση, αλλά με τη διαστατική ανάλυση δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της αδιάστατης πολλαπλασιαστικής σταθεράς $\phi_1(\varphi)$. Η αναλυτική λύση του προβλήματος οδηγεί στο ότι για μεγάλου πλάτους αιωρήσεις η τιμή της σταθεράς ϕ_1 έχει πολύπλοκη εξάρτηση από τη γωνία εκτροπής, συγκεκριμένα, ισχύει:

$$\phi_1(\varphi)=2\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\kappa\right)^2+\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\kappa^2\right)^2+\left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\kappa^3\right)^2+\ldots\right]$$

όπου $\kappa=\sin\dfrac{1}{2}\varphi$.

Η γωνία μετριέται σε ακτίνια. Για σχετικά μικρές τιμές της γωνίας εκτροπής φ ισχύει $\phi_1=2\pi$, δηλαδή για μικρού πλάτους αιωρήσεις η περίοδος είναι ανεξάρτητη της γωνίας εκτροπής. Μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει το πιο απλό πρόβλημα του εκκρεμούς για μικρού πλάτους αιωρήσεις, οπότε δεν συμπεριλαμβάνει στα ανεξάρτητα μεγέθη τη γωνία εκτροπής. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μόνο ένας όρος του αθροίσματος. Αυτό οδηγεί εύκολα στο ότι

$$\tau = K\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2},$$

όπου K είναι απροσδιόριστη αδιάστατη σταθερά. Ξέρουμε ότι η τιμή της υπολογίζεται αναλυτικά και είναι 2π. Αυτή η περίπτωση εξετάζεται ακόμη και σε βιβλία Φυσικής μέσης εκπαίδευσης. Βλέπουμε ότι για την περίπτωση των αιωρήσεων μικρού πλάτους μπορούμε να γράψουμε τη σχέση:

$$\frac{\tau^2 g}{l} = K^2 = \text{αδιάστατη ποσότητα}.$$

Αυτό σημαίνει ότι σε αυτήν την περίπτωση ο νόμος για την αιώρηση του απλού εκκρεμούς μπορεί να γραφτεί στη μορφή όπου υπεισέρχεται μια αδιάστατη ποσότητα, η οποία είναι συνδυασμός ποσοτήτων. Σε αυτήν την περίπτωση η αδιάστατη ποσότητα είναι σταθερή.

β) Ένα άλλο απλό παράδειγμα είναι η εξίσωση Torricelli, που δίνει την ταχύτητα με την οποία εκρέει (ασυμπίεστο) υγρό από μια μικρή τρύπα στο κάτω μέρος δεξαμενής μεγάλης διατομής σε σχέση με τη διατομή της τρύπας. Το ύψος της επιφάνειας του υγρού στη δεξαμενή από την τρύπα, η επιτάχυνση (ένταση) της βαρύτητας, καθώς και η πυκνότητα του υγρού είναι δεδομένα. Θεωρούμε εύλογο να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα υ εξαρτάται από τα ανωτέρω μεγέθη, δηλαδή τα h, g, ρ. Θα έχουμε τον γενικό όρο $kh^a g^b \rho^c$. Θεμελιώδη μεγέθη θεωρούμε και εδώ το μήκος, τη μάζα και τον χρόνο. Οι διαστάσεις των h, g, ρ είναι: $\mathsf{L}, \left[\mathsf{LT}^{-2}\right], \left[\mathsf{ML}^{-3}\right]$ και της ταχύτητας υ είναι LT^{-1}, επομένως η διαστατική εξίσωση είναι: $\left[\mathsf{LT}^{-1}\right] = \mathsf{L}^a\left[\mathsf{LT}^{-2}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c$. Από αυτήν βρίσκουμε: $a = b = 1/2 \quad c = 0$. Τελικώς $\upsilon = k\sqrt{gh}$. Η αδιάστατη σταθερά k μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά ή (εδώ) μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά και είναι $k = \sqrt{2}$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση του Torricelli στη μορφή

$$\frac{\upsilon^2}{gh} = k^2 = \text{αδιάστατη σταθερά}.$$

Δηλαδή η έκφραση μπορεί να πάρει μορφή που εξαρτάται από συνδυασμό μεταβλητών, ο οποίος είναι μια αδιάστατη ποσότητα (τέτοιες ποσότητες ονομάζονται *χαρακτηριστικοί αριθμοί*) που εδώ είναι μια σταθερά. Αυτή η αδιάστατη ποσότητα $Fr = \dfrac{\upsilon^2}{gh}$ ονομάζεται *αριθμός Froude*.

γ) Σε αυτό το παράδειγμα, θα υπολογίσουμε την περίοδο περιφοράς περί το κέντρο μάζας δύο ουράνιων σωμάτων που αλληλεπιδρούν σύμφωνα με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης. Θεωρούμε τα σώματα ότι είναι υλικά σημεία. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η περίοδος τ εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων m_1, m_2, από κάποια απόσταση μεταξύ τους r που είναι ένα είδος μέσης τιμής (γενικώς η μεταξύ τους απόσταση μεταβάλλεται με τον χρόνο) και την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας G (υποθέτουμε ότι στο σύστημα μονάδων που εργαζόμαστε έχει διαστάσεις). Σύμφωνα με όσα είπαμε, ο γενικός όρος έχει τη μορφή $km_1^a m_2^b r^c G^d$, όπου k αδιάστατη σταθερά. Για τις διαστάσεις της παγκόσμιας σταθεράς έχουμε:

$$\dim G = \left[G\right] = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}.$$

Η εξίσωση διαστάσεων για την προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\mathrm{T}^1 = \mathrm{M}^a\mathrm{M}^b\mathrm{L}^c\left(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}\right)^d = \mathrm{M}^{a+b-d}\mathrm{L}^{c+3d}\mathrm{T}^{-2d}.$$

Η ομογένεια οδηγεί στο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$1 = -2d,\ a+b-d=0,\ c+3d=0.$$

Οι άγνωστοι είναι τέσσερις και οι εξισώσεις είναι τρεις, επομένως ο ένας άγνωστος δεν προσδιορίζεται, έστω το a. Επομένως

$$d = -1/2,\ c = 3/2,\ b = -a - 1/2.$$

Με αυτές τις τιμές βρίσκουμε το παρακάτω άθροισμα, όπου ο κάθε όρος αντιστοιχεί σε ένα a_i και στο αντίστοιχο k_i

$$\tau = \frac{r^{3/2}}{G^{1/2}m_2^{1/2}}\left(k_1\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{a_1} + k_2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{a_2} + k_3\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{a_3} + \ldots\right).$$

Μπορούμε να γράψουμε το άθροισμα ως μια αδιάστατη σταθερά συνάρτηση $\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$. Το πρόβλημα έχει αναλυτική λύση, όπου αν r είναι ο μεγάλος ημιάξονας, a, της έλλειψης που διαγράφει η μια μάζα ως προς την άλλη, τότε ισχύει ,

$$\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{2\pi}{\left[\frac{m_1}{m_2}+1\right]^{1/2}}.$$

Αν $m_2 = M >> m_1 = m$ (δηλαδή η μια μάζα είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη), τότε

$$\phi\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = 2\pi$$

και βρίσκουμε τη γνωστή σχέση

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}}.$$

Εύκολα μπορεί αυτή η έκφραση να μετατραπεί ώστε να εξαρτάται από συνδυασμό μεγεθών που είναι αδιάστατο μέγεθος.

δ) Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη ροή ασυμπίεστου υγρού μέσα σε ευθύγραμμο κυλινδρικό σωλήνα κυκλικής διατομής όταν υπάρχει τριβή. Από την αρχή θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστό πως η «πτώση» πίεσης Δp κατά μήκος της ροής στον σωλήνα είναι ανάλογη του μήκους l στο οποίο αναφερόμαστε. Αυτό σημαίνει ότι αντί για τις δύο παραπάνω μεταβλητές έχουμε μία, δηλαδή το πηλίκο $\Delta p/l$. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η πτώση πίεσης ανά μονάδα μήκους εξαρτάται από τις εξής μεταβλητές: τη διάμετρο της διατομής του σωλήνα d, τη μέση ταχύτητα ροής υ, τον συντελεστή εσωτερικής τριβής του υγρού (ιξώδες) η και την πυκνότητα του υγρού ρ. Το φαινόμενο μπορεί να εξεταστεί χωρίς να υποθέσουμε ότι έχουμε εξάρτηση από το $\Delta p/l$, οπότε θα έχουμε μια μεταβλητή παραπάνω. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε σχέση μεταξύ $\Delta p/l$ και των άλλων μεταβλητών. Κατά τα γνωστά, θα έχουμε τον γενικό όρο, $kd^\alpha\upsilon^\beta\eta^\gamma\rho^\delta$. Η διαστατική εξίσωση είναι:

$$\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{L}^\alpha\left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^\beta\left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right)^\gamma\left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^\delta$$

επομένως

$$\alpha+\beta-\gamma-3\delta=-2,\ \gamma+\delta=1,\ -\beta-\gamma=-2\,.$$

Οι άγνωστοι είναι τέσσερις και οι αλγεβρικές εξισώσεις τρεις, επομένως ο ένας εκθέτης μένει απροσδιόριστος. Θα υποθέσουμε ότι αυτός είναι ο εκθέτης γ, οπότε έχουμε τη λύση:

$$\alpha=-1-\gamma,\ \beta=2-\gamma,\ \delta=1-\gamma\,.$$

Το γ παίρνει διάφορες αυθαίρετες τιμές, οπότε οδηγούμαστε στη σειρά:

$$\Delta p/l = k_1\rho\upsilon^2 d^{-1}\left(R_e\right)^{-\gamma_1} + k_2\rho\upsilon^2 d^{-1}\left(R_e\right)^{-\gamma_2} + k_3\rho\upsilon^2 d^{-1}\left(R_e\right)^{-\gamma_3}\ \ldots$$

$$\Delta p/l = \rho\upsilon^2 d^{-1}\phi\left(R_e\right)$$

όπου $R_e = \dfrac{\upsilon d\rho}{\eta}$ είναι καθαρός αριθμός, ένας χαρακτηριστικός αριθμός, είναι ο αριθμός Reynolds, από τον οποίο εξαρτάται αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης. Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί και στη μορφή:

$$\frac{\Delta p\, d}{l\rho\upsilon^2}=\phi\left(R_e\right),$$

όπου και το πρώτο μέλος είναι καθαρός αριθμός. Δηλαδή εδώ έχουμε δύο αδιάστατους συνδυασμούς μεγεθών, χαρακτηριστικούς αριθμούς, που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι. Σημειώνουμε ότι για στρωτή ροή (μικρές τιμές του R_e) η απροσδιόριστη έκφραση $\phi\left(R_e\right)$ υπολογίζεται αναλυτικά. Σε αυτήν την περίπτωση: $\phi(R_e)=16/R_e$. Αν λάβουμε υπόψη ότι η παροχή όγκου (όγκος υγρού ανά μονάδα χρόνου) παριστάνεται με $Q_V = \pi r^2\upsilon$, όπου $r = d/2$ είναι η ακτίνα του σωλήνα (υ είναι η μέση ταχύτητα), τότε βρίσκουμε τη γνωστή σχέση του Poiseuille,

$$Q_V = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}r^4\,.$$

3.2 Μέθοδος Buckingham

Στη μέθοδο Buckingham, η οποία ονομάζεται και *Γενική Μέθοδος*, γίνεται χρήση του Θεωρήματος Π (πι, the Pi Theorem, ή Buckingham Pi Theorem, το Θεώρημα Π του Buckingham). Το κεφαλαίο ελληνικό γράμμα, Π, είναι το διεθνές σύμβολο της παράστασης γινομένου,

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n\,,$$

οπότε, επειδή εδώ υπεισέρχονται γινόμενα, γι’ αυτό χρησιμοποιείται ο όρος Θεώρημα Π (πι). Τονίζουμε ότι αυτή η δεύτερη μέθοδος δεν επεκτείνει τη διαστατική ανάλυση σε προβλήματα που δεν μπορεί να αντιμετωπίσει η μέθοδος Rayleigh, όμως αποτελεί τη βάση μιας λογικής διαδικασίας ανάλυσης και δίνει τη δυνατότητα ώστε τα αποτελέσματα μιας διερεύνησης να παρουσιαστούν στην πιο γενική μορφή. Η όλη ιδέα έχει σχέση με το γεγονός που ήδη είδαμε στα προηγούμενα, όπου οι διάφορες εκφράσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών μπορεί να γίνουν εκφράσεις μεταξύ ανεξάρτητων αδιάστατων συνδυασμών αυτών των μεγεθών. Η αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με τη χρήση της θεωρίας συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία που παραθέτουμε. Δεν θα παρουσιαστεί σε λεπτομέρειες η αλγεβρική θεωρία της διαστατικής ανάλυσης, θα αναφερθούμε μόνο σε κάποια συμπεράσματά της. Η έκφραση με αδιάστατες ομάδες φυσικών μεγεθών απλοποιεί τα πράγματα, διότι ανάγει το πρόβλημα σε πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές.

Για το Θεώρημα Π χρειάζεται να αναφέρουμε τα εξής: Ένα αδιάστατο γινόμενο μεγεθών είναι γινόμενο που αποτελείται από μεγέθη, που γενικώς είναι υψωμένα σε θετικές ή αρνητικές δυνάμεις, έτσι που το γινόμενο να είναι αδιάστατο, καθαρός αριθμός. Από n μεγέθη μπορεί να φτιαχτεί ένα μεγάλο πλήθος αδιάστατων γινομένων. Ένα σύνολο αδιάστατων μεγεθών είναι πλήρες, αν τα μέλη του είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κάθε άλλο αδιάστατο γινόμενο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μελών αυτού του πλήρους συνόλου.

Η διατύπωση του Θεωρήματος Π είναι:

> *Κάθε διαστατικά ομογενής εξίσωση που συνδέει n ποσότητες (μεγέθη), μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ των μελών ενός πλήρους συνόλου αδιάστατων γινομένων.*

Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το πλήθος των αδιάστατων γινομένων ενός τέτοιου πλήρους συνόλου και να βρεθούν αυτά τα γινόμενα. Το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $k = n - r$, όπου $r \le n$ είναι τα μεγέθη αναφοράς (θεμελιώδη μεγέθη), δηλαδή τα r μεγέθη αναφοράς που εισέρχονται στο κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά με τρόπο που οι εξαρτήσεις των άλλων μεγεθών από αυτά να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα λέμε ότι αυτά είναι διακριτά. Συνήθως το r είναι ίσο με το πλήθος των μεγεθών αναφοράς που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει, οπότε πρέπει να ληφθεί υπόψη η απαίτηση της ανεξαρτησίας που μνημονεύσαμε. Αυτό θα το δούμε παρακάτω πιο συγκεκριμένα. Συνοψίζουμε λέγοντας πως κάθε ομογενής εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ $k = n - r$ ανεξάρτητων αδιάστατων γινομένων.

Καλό είναι να αναφέρουμε ότι ο σωστός κανόνας εύρεσης του πλήθους των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν ένα πλήρες σύνολο είναι ο εξής: Ο αριθμός των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν πλήρες σύνολο είναι ίσος με τον ολικό αριθμό των μεταβλητών, n, μείον την τάξη της διαστατικής τους μήτρας που θα εισαχθεί αμέσως τώρα. Η διαστατική μήτρα ή μήτρα διαστάσεων (στα ελληνικά η μήτρα λέγεται και πίνακας) είναι μια ορθογώνια μήτρα. Για παράδειγμα, έστω ότι οι μεταβλητές ενός συγκεκριμένου προβλήματος είναι η ταχύτητα υ, το μήκος l, η δύναμη F, η πυκνότητα (μάζας) ρ, το ιξώδες η και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Ας θεωρήσουμε ότι θεμελιώδη μεγέθη της Μηχανικής είναι τα «συνήθη», μάζα, μήκος και χρόνος με διαστάσεις αντίστοιχα $\mathrm{M,L,T}$. Σχηματίζουμε την παρακάτω διαστατική μήτρα της οποίας τα στοιχεία είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Για παράδειγμα, οι διαστατικοί εκθέτες για το g (αφού $\dim g = \mathrm{M^0L^1T^{-2}}$), είναι 0,1,-2. Λαμβάνουμε υπόψη τους διαστατικούς εκθέτες όλων των μεγεθών, οπότε έχουμε τελικώς τη διαστατική μήτρα:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \upsilon & l & F & \rho & \eta & g \\
\mathrm{M} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\mathrm{L} & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\
\mathrm{T} & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2
\end{array}
$$

Από αυτήν τη μη τετραγωνική μήτρα μπορούμε να φτιάξουμε διάφορες τετραγωνικές μήτρες (δηλαδή μήτρες που έχουν ίσο αριθμό στηλών και γραμμών), διαγράφοντας γραμμές ή και στήλες. Οι ορίζουσες αυτών των τετραγωνικών μητρών ονομάζονται ορίζουσες της αρχικής μήτρας. Αν μια μήτρα περιέχει μια μη μηδενική ορίζουσα τάξης r ενώ όλες οι ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του r έχουν τιμή μηδέν, τότε λέμε ότι η τάξη της μήτρας είναι r. Στην προηγούμενη περίπτωση οι τετραγωνικές μήτρες που φτιάχνονται έχουν μέγιστη τάξη 3. Εφόσον υπάρχει μήτρα 3×3 που είναι μη μηδενική, συμπεραίνουμε ότι η τάξη της παραπάνω διαστατικής μήτρας είναι 3. Τέτοια μη μηδενική μήτρα είναι αυτή που σχηματίζεται από τις τρεις τελευταίες στήλες. Πράγματι έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Εδώ η τάξη της διαστατικής μήτρας συμπίπτει με το πλήθος των θεμελιωδών μεγεθών που εισέρχονται στο πρόβλημα, που είναι 3: μάζα, μήκος και χρόνος. Το θεώρημα για το πλήθος των αδιάστατων γινομένων προέρχεται από τη θεωρία περί αλγεβρικών εξισώσεων. Σχετίζεται με το πλήθος των ανεξάρτητων λύσεων ενός συστήματος (ανεξάρτητων) αλγεβρικών εξισώσεων όπου υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από το πλήθος των εξισώσεων. Τα παραπάνω $k = n - r$ αδιάστατα γινόμενα αποτελούν ένα πλήρες σύνολο από αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από το σύνολο των n μεγεθών, με την έννοια που αναφέραμε και στα προηγούμενα, δηλαδή το σύνολο είναι πλήρες αν κανένα μέλος του δεν εκφράζεται από άλλα μέλη αυτού του συνόλου, ενώ όλα τα άλλα αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από τις n ποσότητες, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μελών του πλήρους συνόλου. Στην παραπάνω περίπτωση $n = 6,\ r = 3$ επομένως το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $k = n - r = 6 - 3 = 3$. Είναι δυνατό η διαστατική μήτρα να είναι ανώμαλη. Αυτό σημαίνει ότι κάποια σειρά της δεν είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, αλλά είναι άθροισμα άλλων σειρών της αφού πολλαπλασιαστούν επί κατάλληλες σταθερές. Σε αυτήν την περίπτωση η τάξη της διαστατικής μήτρας r είναι μικρότερη από το πλήθος των θεμελιωδών μεγεθών της μήτρας. Με άλλα λόγια, τα συγκεκριμένα θεμελιώδη μεγέθη δεν είναι διακριτά για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον συμβολισμό μας, πρόκειται για το πλήθος των σειρών της διαστατικής μήτρας. Με αυτήν την έννοια, ανώμαλη είναι η παρακάτω διαστατική μήτρα:

$$\begin{array}{ccccc} & p & q & s & x \\ \mathrm{M} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \mathrm{L} & -1 & 6 & -3 & 0 \\ \mathrm{T} & 1 & 20 & -3 & 8 \end{array}$$

Πράγματι, μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι όλες οι ορίζουσες τρίτης τάξης είναι μηδέν, αλλά υπάρχει δεύτερης τάξης ορίζουσα που είναι μη μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι για την τάξη της μήτρας ισχύει: $r = 2$. Σημειώνουμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε επί 2 την πρώτη σειρά, τη δεύτερη επί 3 και προσθέσουμε τα αποτελέσματα παίρνουμε την τρίτη σειρά. Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 .$$

Εφόσον $r = 2$, μπορούμε να κρατήσουμε τις δύο πρώτες γραμμές που περιέχουν αυτήν τη μη μηδενική ορίζουσα, να διαγράψουμε την τρίτη γραμμή της μήτρας και να προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος. Τετριμμένη περίπτωση όπου η διαστατική μήτρα είναι ανώμαλη εμφανίζεται αν στις θεμελιώδεις μεταβλητές συμπεριληφθούν μεταβλητές που δεν επηρεάζουν το πρόβλημα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η παρακάτω διαστατική μήτρα:

$$\begin{array}{cccc} & l & t & g \\ \mathrm{M} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{L} & 1 & 0 & 1 \\ \mathrm{T} & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Εδώ η πρώτη γραμμή ισούται με το άθροισμα του γινομένου της δεύτερης γραμμής πολλαπλασιασμένης επί μηδέν και του γινομένου της τρίτης γραμμής πολλαπλασιασμένης επί μηδέν. Είναι ευνόητο ότι η ορίζουσα 3×3 είναι μηδέν, ενώ υπάρχουν μη μηδενικές ορίζουσες τάξης 2. Δηλαδή $r = 2$.

Είναι ευνόητο πως μπορούμε να παραλείψουμε την πρώτη γραμμή και να προχωρήσουμε με τη νέα μήτρα στη λύση του προβλήματος. Μια άλλη απλή περίπτωση είναι δύο γραμμές να είναι ίδιες ή η μία πολλαπλάσια της άλλης.

Οποιαδήποτε εξίσωση μεταξύ n φυσικών μεγεθών μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή $\phi_1(Q_1,Q_2,...,Q_n)=0$. Για να έχουμε ανεξαρτησία, όπως την ορίσαμε στα προηγούμενα, δεν θα πρέπει να υπάρχει άλλη εξίσωση μεταξύ των φυσικών μεγεθών. Το θεώρημα Π μας λέει ότι, αν r είναι η τάξη της διαστατικής μήτρας , τότε η ανωτέρω σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση που εξαρτάται από $k=n-r$ αδιάστατα γινόμενα $\Pi_1, \Pi_2,...,\Pi_{n-r}$ (παριστάνονται και με $\pi_1, \pi_2,...,\pi_{n-r}$), δηλαδή καταλήγουμε σε σχέση της μορφής $\phi(\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_{n-r})=0$.

Όπως είπαμε προηγουμένως, ένα προτέρημα αυτής της μεθόδου είναι το γεγονός ότι οι μεταβλητές έχουν μειωθεί από n σε $n-r$. Αυτό είναι χρήσιμο για τον ερευνητή, διότι μειώνει το πλήθος των μεταβλητών τις οποίες πρέπει να εξετάσει, δηλαδή τις μεταβλητές που επηρεάζουν το φαινόμενο. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τον συστηματικό υπολογισμό αδιάστατων γινομένων. Θα το κάνουμε με ειδικά παραδείγματα και θα υποθέτουμε ότι από αυτά είναι κατανοητή η χρήση των διαδικασιών και για άλλες περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι τα αδιάστατα γινόμενα μπορεί να πολλαπλασιαστούν, να διαιρεθούν μεταξύ τους, επίσης να υψωθούν σε διάφορες δυνάμεις και να προκύψουν και πάλι αδιάστατα γινόμενα. Επίσης, κάθε αδιάστατο γινόμενο επί μια αδιάστατη σταθερά οδηγεί σε αδιάστατη σταθερά. Συνηθίζεται τα αδιάστατα γινόμενα να περιλαμβάνουν καθιερωμένα τέτοια γινόμενα, όπως για παράδειγμα ο πολύ γνωστός αριθμός Reynolds.

Α) Μια απλοϊκή μέθοδος που μπορεί να εφαρμόσει κάποιος σε μερικές περιπτώσεις, είναι να εξετάσει το πρόβλημα λίγο πολύ εμπειρικά και να καταλήξει στα ανεξάρτητα αδιάστατα γινόμενα. Ας δούμε την πολύ απλή περίπτωση υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κατακόρυφη κίνηση μέσα στο πεδίο βαρύτητας, g, ξεκινώντας από τη θέση μηδέν με αρχική ταχύτητα u. Εκτός από αυτά τα μεγέθη, τα μεγέθη που εισέρχονται είναι το διάστημα l που διανύει το υλικό σημείο και ο χρόνος t στον οποίο το διανύει, δηλαδή $n=4$. Η διαστατική μήτρα είναι:

$$\begin{array}{ccccc} & u & t & l & g \\ \mathrm{L} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathrm{T} & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

Υπάρχουν ορίζουσες δεύτερης τάξης μη μηδενικές, άρα $r=2$, επομένως υπάρχουν $k=4-2=2$ αδιάστατα γινόμεναν Π_1, Π_2. Θα επιχειρήσουμε να βρούμε το ένα στη μορφή $\Pi_1=\Pi_1(utl)$ και το άλλο $\Pi_2=\Pi_2(utg)$. Διαλέγουμε τρία διαφορετικά κάθε φορά από τα τέσσερα, γιατί έτσι είμαστε σίγουροι ότι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Επίσης, επειδή είναι χρήσιμο να βρούμε τη σχέση του διαστήματος συναρτήσει του χρόνου (όπως κάνουμε συνήθως σε αυτήν την περίπτωση), δεν βάζουμε την εξάρτηση από το μήκος και στα δύο, αλλά μόνο στο ένα αδιάστατο γινόμενο. Με απλή παρατήρηση καταλαβαίνουμε ότι στην περίπτωση του μεγέθους Π_1, οι διαστάσεις του ut «αναιρούνται» από τη διάσταση του l, αν θεωρήσουμε ότι:

$$\Pi_1=\frac{ut}{l}.$$

Ανάλογος συλλογισμός για το Π_2 οδηγεί στο ότι οι διαστάσεις του gt «αναιρούνται» από τις διαστάσεις του u, αν θεωρήσουμε την έκφραση:

$$\Pi_2 = \frac{gt}{u}.$$

Τελικώς, έχουμε τη σχέση:

$$\phi\left(\frac{ut}{l}, \frac{gt}{u}\right) = 0.$$

Αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{l}{ut} = \phi'\left(\frac{gt}{u}\right), \qquad l = ut\phi'\left(\frac{gt}{u}\right).$$

Είναι γνωστή (ακόμη και από τη Φυσική της Μέσης Εκπαίδευσης) η αναλυτική λύση:

$$l = ut + \frac{1}{2}gt^2.$$

Αυτό σημαίνει πως η απροσδιόριστη έκφραση από τη διαστατική ανάλυση είναι:

$$\phi'\left(\frac{gt}{u}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{gt}{u} \quad .$$

Β) Στη συνέχεια αναλύουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και προσδιορίζουμε τα αδιάστατα γινόμενα, ακολουθώντας μια πιο συστηματική διαδικασία. Χρησιμοποιούμε το ίδιο παράδειγμα που μελετήσαμε με τη μέθοδο Rayleigh, δηλαδή θα μελετήσουμε τη ροή υγρού σε σωλήνα κυκλικής διατομής όταν υπάρχει τριβή. Θα θεωρήσουμε ότι οι φυσικές ποσότητες που υπεισέρχονται στο πρόβλημα (αυτές χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως) είναι οι εξής: $\Delta p / l, d, \upsilon, \eta, \rho$. Επίσης, θα θεωρήσουμε ως θεμελιώδη μεγέθη από τα οποία εξαρτώνται αυτά τα πέντε μεγέθη στο πρόβλημά μας, τη μάζα, το μήκος και τον χρόνο. Τίποτα δεν εμποδίζει να γίνει χρήση άλλων φυσικών μεγεθών που να θεωρηθούν ως θεμελιώδη μέσα στο πλαίσιο συστήματος φυσικών μεγεθών όπου υπάρχουν συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις για τα μεγέθη. Στη βιβλιογραφία μπορεί να δει κάποιος διάφορες περιπτώσεις. Εδώ περιοριζόμαστε σε θεμελιώδη μεγέθη των «γνωστών» συστημάτων μεγεθών και μονάδων.

Το θεώρημα Π λέει ότι αν r είναι το πλήθος των διακριτών θεμελιωδών μεγεθών που χρειάζονται για να εκφραστούν με διαστατικές εξισώσεις όλες οι n μεταβλητές, τότε όλα αυτά τα μεγέθη μπορούν να ομαδοποιηθούν σε $k = n - r$ ανεξάρτητα αδιάστατα γινόμενα Π. Η διαστατική μήτρα για την περίπτωσή μας είναι η:

	$\Delta p / l$	d	υ	η	ρ
M	1	0	0	1	1
L	-2	1	1	-1	-3
T	-2	0	-1	-1	0

Μπορεί να βεβαιωθεί κάποιος ότι η τάξη της μήτρας είναι 3, άρα $r = 3$, οπότε τα αδιάστατα γινόμενα θα είναι $k = n - r = 5 - 3 = 2$. Υποθέτουμε ότι

$$\Pi = \left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{\alpha} d^{\beta} \upsilon^{\gamma} \eta^{\delta} \rho^{\varepsilon} \quad .$$

Από αυτήν βρίσκουμε:

$$\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0 = \left(\mathrm{ML}^{-2}\mathrm{T}^{-2}\right)^{\alpha} \mathrm{L}^{\beta} \left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^{\gamma} \left(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\right)^{\delta} \left(\mathrm{ML}^{-3}\right)^{\varepsilon}.$$

Από αυτήν τη σχέση καταλήγουμε στις:

$$\alpha + \delta + \varepsilon = 0, \; -2\alpha + \beta + \gamma - \delta - 3\varepsilon = 0, \; -2\alpha - \gamma - \delta = 0 \; .$$

Επιλέγουμε $\alpha = 1,\ \beta = 0$ οπότε $\delta = 1,\ \gamma = -3,\ \varepsilon = -2$. Τελικώς έχουμε το αδιάστατο γινόμενο:

$$\Pi_1 = \frac{\eta \Delta p / l}{\upsilon^3 \rho^2} \ .$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε

$$\alpha = 0,\ \beta = 1 \text{ οπότε } \gamma = 1,\ \delta = -1,\ \varepsilon = 1 \ .$$

Το αδιάστατο γινόμενο είναι:

$$\Pi_2 = \frac{\upsilon d \rho}{\eta} = R_e = \text{ο αριθμός Reynolds} \ .$$

Οι (αυθαίρετες) επιλογές των τιμών των δύο εκθετών ήταν τέτοιες ώστε να λείπει μια μεταβλητή διαφορετική από το καθένα αδιάστατο γινόμενο. Επίσης, επιλέξαμε να υπάρχει το πηλίκο $\Delta p / l$ μόνο στο ένα γινόμενο ώστε να μπορούμε να δώσουμε την απάντηση στη μορφή $\Delta p / l$ ως προς τις άλλες μεταβλητές. Αυτά οδήγησαν στα δύο ανεξάρτητα γινόμενα που βρήκαμε. Άρα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2) = \phi\left(\frac{\eta \Delta p / l}{\upsilon^3 \rho^2}, \frac{\upsilon d \rho}{\eta} \right) = \phi\left(\frac{\eta \Delta p / l}{\upsilon^3 \rho^2}, R_e \right) = 0$$

ή

$$\eta \Delta p / l = \upsilon^3 \rho^2 \phi_1(R_e).$$

Αυτή είναι η σχέση που βρήκαμε και με τη μέθοδο Rayleigh.

Γ) Θα ακολουθήσουμε τώρα μια άλλη ακόμη πιο συστηματική τεχνική για τη μελέτη του φαινομένου του κυματισμού στην επιφάνεια υγρού (ουσιαστικά νερού) μικρού βάθους. Η μέθοδος κάνει χρήση του συνόλου των επαναληπτικών μεταβλητών (recurring set, pro-basic set). Τα φυσικά μεγέθη που εισέρχονται στο πρόβλημα είναι πέντε $(n = 5)$, τα $\lambda,\ \upsilon, g, \rho, d$ όπου:

λ μήκος κύματος, υ ταχύτητα διάδοσης,
g επιτάχυνση της βαρύτητας ή ένταση της βαρύτητας,
ρ πυκνότητα νερού, d βάθος νερού.

Ως θεμελιώδεις ποσότητες από τις οποίες εξαρτάται το πρόβλημα θεωρούμε το μήκος, τη μάζα και τον χρόνο. Εύκολα προκύπτει ότι η διαστατική μήτρα είναι:

	λ	υ	g	ρ	d
L	1	1	1	−3	1
M	0	0	0	1	0
T	0	−1	−2	0	0

Μπορείτε να δείτε ότι υπάρχει ορίζουσα τρίτης τάξης που είναι μη μηδενική. Επομένως $r = 3$, οπότε το πλήθος των αδιάστατων ανεξάρτητων γινομένων, Π είναι $k = n - r = 5 - 3 = 2$. Από τις $n = 5$ μεταβλητές θα διαλέξουμε $r = 3$ που θα αποτελέσουν το σύνολο των επαναληπτικών μεταβλητών. Η επιλογή δεν είναι τελείως αυθαίρετη, πρέπει στο σύνολο των $r = 3$ επαναληπτικών μεταβλητών να υπάρχουν όλες οι θεμελιώδεις μεταβλητές του προβλήματος, που είναι $r = 3$. Στην περίπτωσή μας, τουλάχιστον μία από τις επιλεγείσες επαναληπτικές μεταβλητές πρέπει να περιέχει στη διαστατική της σχέση το θεμελιώδες μέγεθος μήκος, τουλάχιστον μία τη μάζα και τουλάχιστον μία τον χρόνο. Μετά από την επιλογή του συνόλου των επαναληπτικών μεταβλητών, καθεμία από τις υπόλοιπες $k = n - r = 5 - 3 = 2$ ποσότητες συνδυάζεται με τις επαναληπτικές μεταβλητές έτσι που να σχηματίζει αδιάστατο γινόμενο Π. Είναι ευνόητο ότι αν επαναληπτικές μεταβλητές, από μόνες τους, μπορεί να

σχηματίσουν αδιάστατο γινόμενο, τότε μπορεί να σχηματίσουν αδιάστατο γινόμενο με άλλο μέγεθος μόνο αν αυτό είναι αδιάστατο.
Ας δούμε τι γίνεται στη συγκεκριμένη περίπτωση. Διαλέγουμε ως επαναληπτικές τις $r=3$ μεταβλητές υ, g, ρ. Αυτές είναι κατάλληλες, γιατί περιέχουν η καθεμία τουλάχιστον ένα από τα θεμελιώδη μεγέθη μήκος, μάζα και χρόνο. Στη συνέχεια σχηματίζουμε το $\Pi_1 = \upsilon^\alpha g^\beta \rho^\gamma \lambda^\delta$.
Η διαστατική σχέση είναι

$$\mathrm{L^0M^0T^0} = \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^\alpha \left(\mathrm{LT^{-2}}\right)^\beta \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^\gamma \mathrm{L}^\delta .$$

Από αυτήν τη σχέση καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\alpha+\beta-3\gamma+\delta=0, \quad \gamma=0, \quad -\alpha-2\beta=0 .$$

Μια λύση είναι:

$$\alpha=-2, \ \beta=1, \ \gamma=0, \ \delta=1 .$$

Επομένως:

$$\Pi_1 = \frac{g\lambda}{\upsilon^2} .$$

Σχηματίζουμε το

$$\Pi_2 = \upsilon^\alpha g^\beta \rho^\gamma d^\delta .$$

Ισχύει η σχέση

$$\mathrm{L^0M^0T^0} = \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^\alpha \left(\mathrm{LT^{-2}}\right)^\beta \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^\gamma \mathrm{L}^\delta .$$

Αυτή είναι ίδια με την προηγούμενη, οπότε μπορούμε να δεχτούμε την ίδια λύση και έτσι να καταλήξουμε στη σχέση

$$\Pi_2 = \frac{gd}{\upsilon^2} .$$

Τα Π_1, Π_2 είναι ανεξάρτητα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητα γινόμενα και τα $\Pi_1 = \dfrac{g\lambda}{\upsilon^2}$, $\pi_2 = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2} = \dfrac{d}{\lambda}$. Προφανώς ισχύει: $\phi\left(\dfrac{g\lambda}{\upsilon^2}, \dfrac{d}{\lambda}\right)=0.$ Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από την πυκνότητα του υγρού.

Είναι βολικό να δίνουμε τα αποτελέσματα σε μορφή πίνακα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι διαστατικοί εκθέτες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 στους οποίους στο καθένα αδιάστατο γινόμενο πρέπει να είναι υψωμένα τα μεγέθη $\lambda, \upsilon, g, \rho, d$, αντιστοίχως, έχουν τις τιμές που βρήκαμε προηγουμένως. Ο πίνακας για τη δεύτερη επιλογή αδιάστατων γινομένων είναι ο παρακάτω, όπου $\Pi = \lambda^{x_1} \upsilon^{x_2} g^{x_3} \rho^{x_4} d^{x_5}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Π_1	1	-2	1	0	0
Π_2	-1	0	0	0	1

Δ) Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στη δυνατότητα μείωσης του πλήθους των Π. Θα εξετάσουμε την περίπτωση πτώσης σφαίρας μέσα σε υγρό με οριακή ταχύτητα. Σε ένα υγρό μεγάλης έκτασης αφήνεται να πέσει σφαίρα. Στη σφαίρα δρουν το βάρος της, η άνωση και η τριβή ένεκα ιξώδους. Μετά από λίγο η σφαίρα αποκτά σταθερή ταχύτητα και συνεχίζει την ευθύγραμμη κίνησή της προς τα κάτω. Η ερώτηση είναι πώς εξαρτάται η οριακή ταχύτητα από τα εμπλεκόμενα στο φαινόμενο μεγέθη. Τα σχετικά μεγέθη είναι $n=6$ τα εξής:

υ οριακή ταχύτητα, d διάμετρος της σφαίρας, ρ πυκνότητα του υγρού,
ρ_s πυκνότητα της σφαίρας, η ιξώδες, g βάρος ανά μονάδα μάζας.

Υποθέτουμε πως ο αριθμός Reynolds είναι αρκετά μικρός ώστε οι δυνάμεις που χρειάζονται για να επιταχυνθούν τα σωμάτια του υγρού γύρω από τη σφαίρα είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις τριβής (ιξώδους). Τα συνήθη διακριτά θεμελιώδη μεγέθη που χρησιμοποιούνται είναι $r=3$, το μήκος, η μάζα και ο χρόνος. Αν ακολουθήσουμε τη συνήθη πρακτική, θα καταλήξουμε σε $k=n-r=6-3=3$ αδιάστατα γινόμενα. Η διαστατική μήτρα είναι:

	υ	d	ρ	ρ_s	η	g
L	1	1	−3	−3	−1	1
M	0	0	1	1	1	0
T	−1	0	0	0	−1	−2

και αυτή είναι πράγματι τάξης $r=3$. Εύκολα βρίσκεται ότι το αποτέλεσμα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\upsilon=\frac{\eta}{\rho d}\phi\left(\frac{\rho^2 d^3 g}{\eta^2},\frac{\rho_s}{\rho}\right),$$

δηλαδή με $k=n-r=6-3=3$ αδιάστατα μεγέθη. Όμως σε αυτήν την περίπτωση όταν η διανυσματική ταχύτητα είναι τελικώς σταθερή, δεν εισέρχεται η σχέση δύναμη ίσον μάζα επί επιτάχυνση, δηλαδή η $F=ma$. Αυτό συμβαίνει και στα προβλήματα στατικής. Έτσι το μέγεθος F μπορεί να ληφθεί ως ανεξάρτητο θεμελιώδες μέγεθος μαζί με τα συνήθη m,l,t. Δηλαδή έχουμε τα θεμελιώδη μεγέθη m,l,t,F που θα δούμε ότι είναι πράγματι διακριτά. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε $r=4$ θεμελιώδη μεγέθη που είναι διακριτά. Τώρα οι διαστατικές σχέσεις για τα η, g αλλάζουν και γίνονται $\mathsf{FL}^{-2}\mathsf{T}$ και FM^{-1} αντιστοίχως. Δηλαδή δεν γίνεται χρήση του ανωτέρω θεμελιώδους νόμου της δυναμικής του Νεύτωνα, αλλά της γνωστής σχέσης για τη δύναμη «τριβής» ένεκα του ιξώδους $F=\eta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{dz}}$, καθώς και της σχέσης $g=\frac{F}{m}$, όπου το g χαρακτηρίζει την ένταση του πεδίου βαρύτητας αντί για την επιτάχυνση. Ως συνέπεια αυτού, το πλήθος των Π μειώνεται κατά ένα, δηλαδή από 3 γίνεται 2, αφού $k=n-r=6-4=2$. Επομένως, με αυτόν τον τρόπο η διαστατική ανάλυση μας δίνει μεγαλύτερη πληροφορία για το φαινόμενο, έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Τώρα η μήτρα διαστάσεων γίνεται:

	υ	d	ρ	ρ_s	η	g
L	1	1	−3	−3	−2	0
M	0	0	1	1	0	−1
T	−1	0	0	0	1	0
F	0	0	0	0	1	1

Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι υπάρχει ορίζουσα 4X4, η οποία είναι μη μηδενική. Μια τέτοια είναι η

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \, .$$

Άρα πράγματι, όπως είπαμε, $r = 4$. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ως ένα από τα δύο αδιάστατα γινόμενα μπορεί ληφθεί το

$$\Pi_1 = \frac{\rho_\mathrm{s}}{\rho} \ ,$$

το άλλο μπορεί να ληφθεί στη μορφή:

$$\Pi_2 = d^a \rho^b \eta^c g^e \upsilon \, .$$

Με τον γνωστό τρόπο βρίσκουμε ότι οι εκθέτες είναι δυνατόν να είναι οι:

$$a = -2, \ b = -1, c = 1, e = -1 \, .$$

Άρα:

$$\phi\left(\frac{\rho_\mathrm{s}}{\rho}, \frac{\upsilon \eta}{d^2 \rho g} \right) = 0 \, .$$

Τελικώς βρίσκουμε

$$\upsilon = \frac{d^2 \rho g}{\eta} \phi_1\left(\frac{\rho_\mathrm{s}}{\rho} \right),$$

που σημαίνει άγνωστη εξάρτηση από ένα μόνο αδιάστατο γινόμενο.

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 3

Bridgman, P. W. (1931). *Dimensional analysis*. Yale University Press.

Desloge, E. A. (1994). Suppression and restoration of constants. *American Journal of Physics*, *62*(3).

Desloge, E. A. (1984). Suppression and restoration of constants in physical equations. *American Journal of Physics*, *52*(4).

Isaacson, E. de St. Q., & Isaacson, M. de St. Q. (1975). *Dimensional methods in engineering and physics*. Edward Arnold.

Langhaar, H. L., & Krieger, R. E. (1951). *Dimensional analysis and theory of models*. Publishing Company.

Littlewood, D. E. (1950). *A university algebra*. Heinemann.

Massey, B. S. (1971). *Units, dimensional analysis and physical similarity*. Van Nostrand Reinhold Company.

Οικονόμου, Ε. Ν. (2012). *Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν. Μια σύντομη περιήγηση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Παπαϊωάννου, Α. Θ. (2002). *Μηχανική των ρευστών* (Τόμος Ι). Εκδόσεις Κοράλλι.

Χριστοδουλίδης, Κ. (2009). *Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

Συνολική βιβλιογραφία

Aitchison, I. J. R., & Hey, A. J. G. (1984). *Gauge theories in particle physics*. Adam Hilger LTD.

Bilenky, S. M. (1993*). Quantum field theory for experimentalists*. European School of HEP.

Birge, R. T. (1934). On electric and magnetic units and dimensions. *American Journal of Physics Teacher, 2*(4).

Birge, R. T. (1934). On the establishment of fundamental and derived units, with special reference to electric units, Part I. *Teacher*, *41*(2), 102-109.

Birge, R. T. (1935). On the establishment of fundamental and derived units, with special reference to electric units, Part II. *American Journal of Physics Teacher*, *102*(3), 171-179.

Bridgman, P. W. (1931). *Dimensional analysis*. Yale University Press.

Bureau International des Poids et Mesures. (2019). *Le Système international d'Unités. The International System of Units*, SI 9e édition.

Carron, N. J. (2015). *Babel of units, the evolution of units systems in classical electrodynamics*. Rock West Solutions, Inc.

CGPM. (2014). *Resolutions adopted by the CGPM at its 25th meeting* (18-20 November 2014)-Résolutions adoptées par la CGPM lors de sa 25e réunion (18-20 novembre 2014).

Cohen, R. E., & Giacomo, P. (1987*). Symbols, units, nomenclature and fundamental constants in physics* (revised 2010). International Union of Pure and Applied Physics, Document I.U.P.A.P.-25 (SUNAMCO 87-1).

Desloge, E. A. (1984). Suppression and restoration of constants in physical equations. *American Journal of Physics, 52*(4).

Desloge, E. A. (1994). Suppression and restoration of constants. *American Journal of Physics*, *62*(3).

Eichenberger, A., Baumann, H., Mortara, A., Tommasini, D., Reber, D., Klingele, E., Jeanneret, B., & Jeckelmann, B. (2022). First realization of the kilogram with the METAS Kibble balance. *Metrologia*, *59*, 025008 (9pp).

ΕΛΟΤ. (1999). SI: *Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων*.

Fujii, K., et al. (2016). Realization of the kilogram by the XRCD method. *Metrologia*, *53,* A19.

Halzen, F., & Martin, A. D. (1984). *Quarks and leptons.* John Wiley and Sons.

Heras, J. A., & Baez, G. (2009). *The covariant formulation of Maxwell's equations expressed in a form independent of specific units*. arXiv:0901.0194v1 [physics.class-ph], 1 Jan. 2009.

Heras, J. A. (2007). Can Maxwell's equations be obtained from the continuity equation? *American Journal of Physics*, *75*(7).

Isaacson, E. de St. Q., & Isaacson, M. de St. Q. (1975). *Dimensional methods in engineering and physics*. Edward Arnold.

ISO. (1992). *International Standard ISO 31-0,* Third edition. 1992-08-01.

Jaffe, R. L. (2007). *MIT quantum theory notes.*

JCGM 200.2012. (2008) *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM).* 3rd edition 2008 version with minor corrections-Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM). 3e edition version 2008 avec corrections mineurs.

Kind, D., & Quinn, T. (1998). *Metrology quo vadis?* Physics Today.

Langhaar, H. L., & Krieger, R. E. (1951). *Dimensional analysis and theory of models*. Publishing Company.

Littlewood, D. E. (1950). *A university algebra*. Heinemann.

Luna, E. (2022). *Uncertainties and significant figures*. DeAnza College.

Massey, B. S. (1971). *Units, dimensional analysis and physical similarity*. Van Nostrand Reinhold Company.

Mills, I. M., Mohr, P. J., Quinn, T. J., Taylor, B. N., & Williams, E. R. (2006). Redefinition of the kilogram, ampere, kelvin and mole: a proposed approach to implementing CIPM recommendation 1 (CI-2005). *Metrologia*, *43*, 227-246.

Mohr, P. J. (2008). Defining units in the quantum based SI. *Metrologia*, *45*, 129-133.

Nelson, R. A. (1998). *Guide for metric practice*. Physics Today.

Newell, D. B. (2014). *A more fundamental International System of Units*. Physics Today.

Νόμιμες μονάδες μετρήσεως στην Ελλάδα. Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (1983). Προεδρικό Διάταγμα, Α΄196, Αθήνα 30 Δεκεμβρίου 1983.

Οικονόμου, Ε. Ν. (2012). *Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν. Μια σύντομη περιήγηση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

de Oliveira Sannibale, V. (2001). Measurements and significant figures (Draft). Caltech, Freshman Physics Laboratory.

Παπαϊωάννου, Α. Θ. (2002). *Μηχανική των ρευστών* (Τόμος Ι). Εκδόσεις Κοράλλι.

Petrascheck, D. (2021). Unit system independent formulation of electrodynamics. *European Journal of Physics*, *42*, 045201.

Robinson, I. A., & Schlamminger, S. (2016). The watt or Kibble balance: A technique for implementing the new SI definition of the unit of mass. *Metrologia*, *53*, A46-A74.

Selvan, K. T. (2012). Fundamentals of electromagnetic units and constants. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, *54*(3).

Significant Figures-Rules. (n.d.). Aiken. University of South Carolina.

Significant figures. (n.d.). In Wikipedia. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Significant_figures

Taylor, B. N. (2011). The current SI seen from the perspective of the proposed new SIJ. *Research of the National Institute of Standards and Technology*, *116*, 797-807.

Thompson, A., & Taylor, B. N. (2008). *Guide for the use of the International System of Units (SI)*. NIST Special Publication 811, 2008 Edition.

Weber, W., & Kohlrausch, R. (1856). Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Quershnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik, 99*, 10-25. English translation by D. H. Delphenich, Electrodynamic Measurements in Particular Attributing Mechanical Units to Measures of Current Intensity.

Χριστοδουλίδης, Κ. (2009). *Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

Το σύγγραμμα περιλαμβάνει τρία κεφάλαια, τα οποία δηλώνονται και στον τίτλο του. Η συγγραφή του βιβλίου έγινε για να καλυφθεί ένα κενό στην ελληνόγλωσση βιβλιογραφία. Δεν υπάρχει συστηματική περιγραφή των τριών αντικειμένων στα ελληνικά. Το πρώτο κεφάλαιο, το μεγαλύτερο, ασχολείται με τα συστήματα μονάδων και ιδιαίτερα με το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI, International System of Units). Είναι σημαντικό ότι αναφέρεται η τελευταία εκδοχή του SI που ισχύει από τις 20 Μαΐου 2019. Το διαφορετικό είναι πως το SI στηρίζεται σε επτά θεμελιώδεις φυσικές σταθερές οι οποίες καθορίζουν τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Οι τιμές των σταθερών λαμβάνονται ως δεδομένες χωρίς αβεβαιότητα. Οι παράγωγες μονάδες προκύπτουν από αυτές με τον συνήθη τρόπο. Δίνονται αυστηροί ορισμοί των διάφορων εννοιών, οι οποίοι είναι σχετικοί με το αντικείμενο. Το δεύτερο κεφάλαιο, το μικρότερο από τα τρία, πραγματεύεται τα περί σημαντικών ψηφίων. Παρουσιάζονται με σαφήνεια η έννοια των σημαντικών ψηφίων και η χρήση σε υπολογισμούς. Σε πολλούς υπάρχει σύγχυση μεταξύ σημαντικών και δεκαδικών ψηφίων.

Το τρίτο κεφάλαιο πραγματεύεται τη διαστατική ανάλυση. Είναι γεγονός ότι ιδιαίτερα πολλοί φυσικοί (κυρίως θεωρητικοί) και μηχανικοί κάνουν χρήση διαστατικής ανάλυσης, χωρίς να ξέρουν το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου. Οι μηχανικοί που ασχολούνται με ρευστά είναι πιο ειδικοί στο αντικείμενο με βαθύτερες γνώσεις. Η βαθύτερη γνώση βοηθά στην καλύτερη χρήση της μεθόδου σε πιο σύνθετα προβλήματα.

Πρόκειται για βιβλίο που μπορεί να αξιοποιηθεί και να διαβαστεί αυτοτελώς ή μαζί με άλλα συγγράμματα που σχετίζονται με αντικείμενα τα οποία αναφέραμε προηγουμένως.

Το παρόν σύγγραμμα δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου ΚΑΛΛΙΠΟΣ+	
Χρηματοδότης	Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, Προγράμματα ΠΔΕ, ΕΠΑ 2020-2025
Φορέας υλοποίησης	ΕΛΚΕ ΕΜΠ
Φορέας λειτουργίας	ΣΕΑΒ/Παράρτημα ΕΜΠ/Μονάδα Εκδόσεων
Διάρκεια 2ης Φάσης	2020-2023
Σκοπός	Η δημιουργία ακαδημαϊκών ψηφιακών συγγραμμάτων ανοικτής πρόσβασης (περισσότερων από 700) • Προπτυχιακών και μεταπτυχιακών εγχειριδίων • Μονογραφιών • Μεταφράσεων ανοικτών textbooks • Βιβλιογραφικών Οδηγών
Επιστημονικά Υπεύθυνος	Νικόλαος Μήτρου, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ
ISBN: 978-618-228-119-2	**DOI**: http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-354

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας